

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

32. Band, Heft 2

22. Dezember 1949

S. 49—96

Geschichte.

● Cohen, M. R. and I. E. Drabkin: A source book in Greek Science. New York: McGraw-Hill 1948. XXII, 597 pp. \$ 9.00.

Fraiese, A.: Su alcune questioni della storia della matematica greca. Archimede, Firenze 1, 41—47 (1949).

L'A. dà notizia di alcuni dei problemi più importanti, e tuttora insoluti o contraddittoriamente intesi, che riguardano soprattutto la matematica greca del periodo pre-euclideo. Si avverte, nella rapida esposizione, la necessità, imposta dal carattere della rivista su cui l'articolo è apparso, di restare entro i limiti di brevi cenni di carattere generale, e il poco che è detto tradisce il premere del molto che viene taciuto. Ne nasce uno scritto di notevole suggestività. — Gli argomenti toccati vanno da indicazioni sulle fonti e dal giudizio sul valore di esse, a discussioni sopra le principali interpretazioni che ne sono state date da illustri studiosi in opere talvolta classiche. Si dice di quello che è stato fatto e del molto che rimane a fare; si danno concreti esempi di problemi interpretativi e si illustra il fecondo lavoro che si svolge intorno ad essi. Vale a dare all'articolo una nota di vivo interesse l'accenno che vi si fa a giudizi espressi da Federigo Enriques (1872—1947) in quelle sue geniali conversazioni con gli allievi, che il Fraiese ricorda come specie di ágrafa dógmata.

Campe-delli (Firenze).

Bruins, E. M.: Some remarks on ancient calculation. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 52, 161—163 (1949).

L'A. si indugia a chiarire alcune asserzioni fatte in un suo precedente scritto dedicato al calcolo delle radici quadrate presso i Babilonesi ed i Greci [questo Zbl. 30, 97]. Mostra come, in sostanza, un certo valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ possa ottenersi, partendo da una facile limitazione, mediante alcune operazioni di addizione e poco altro; e, riferendosi ad una osservazione del Neugebauer, prova poi l'identità di due formule usate dai Babilonesi e dai Greci per il calcolo approssimato della radice quadrata di un numero qualunque. Continua con altri casi, nello stesso ordine di idee, terminando con l'illustrare le operazioni che portano al valore $\pi < 197888/62351$.

Campe-delli (Firenze).

Waerden, B. L. van der: Die Arithmetik der Pythagoreer. II.: Die Theorie des Irrationalen. Math. Ann., Berlin 120, 676—700 (1949).

In der vorliegenden Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Arithmetik der Pythagoreer (s. dies. Zbl. 30, 98) behandelt Verf. die Theorie des Irrationalen. Es wird dargelegt, daß zwei Theorien der quadriert rationalen Strecken existierten, die auf vollständig verschiedenen Wegen zu folgendem Ergebnis führten: „zwei quadriert rationale Strecken a und b sind nur dann kommensurabel, wenn die teilerfremden Zahlen M und N , die das Verhältnis der Quadratflächen in kleinsten Termen ausdrücken, Quadratzahlen sind“. — Die erste dieser Theorien, deren Ursprung im Kreis um Archytas zu suchen ist, knüpft an den Begriff des geometrischen Mittels und an das ebenfalls Archytas zugeschriebene VIII. Buch von Euklid an. Auf ihr fußen die Beweise der Sätze Euklid X, 9—10, die als spätere Zutaten erkannt werden. Verf. geht hier auf den metaphysischen Charakter der pythagoreischen Arithmetik ein, deren Zauber auch Platon verfallen ist, wenn er z. B. im Timaios ausspricht, daß bei der Erschaffung des Kosmos der Schöpfer zwischen den Elementen Erde und Feuer die Elemente Luft und Wasser als mittlere

Proportionalen eingeschaltet hat. — Die zweite Irrationalentheorie, in der die nicht direkt kommensurablen Strecken benannt und unterschieden werden durch die auf diesen Strecken aufgebauten Quadrate und die mit den Mitteln der geometrischen Algebra arbeitet, gründet sich auf eine voreudoxische Proportionenlehre, in der die Verhältnisgleichung vermittels der „Wechselwegnahme“ (*ἀνταρλοῖσις*) definiert wird. Sie ist dargelegt im X. Buch von Euklid, das von Theaitetos stammt. Sie tritt aber bereits in dem gleichnamigen Dialog auf, wo sich Platon von einer ganz anderen Seite als im Timaios zeigt, nämlich als wohl unterrichtet über die neuen Entdeckungen von Theodoros und Theaitetos. An den Beziehungen zwischen den im Dialog von Theaitetos entwickelten und den in Euklid X niedergelegten Gedanken weist Verf. überzeugend nach, daß tatsächlich Theaitetos selbst der geniale Denker war, der die Begriffe „kommensurabel“ und „quadiert kommensurabel“ klar formuliert und die Beweise der grundlegenden Sätze durchgeführt hat. Eingehend wird noch die historische Entwicklung des genannten Prinzips der Wechselwegnahme untersucht, sowie der Weg aufgezeigt, auf dem Theodoros die Irrationalitäten, die wir mit den Symbolen $\sqrt[3]{3}$ bis $\sqrt[17]{17}$ bezeichnen, bewiesen haben kann. Verf. entwickelt nämlich ein eigenes, aber durchaus im Gedankenkreis von Theodoros liegendes Verfahren, in dem die Inkommensurabilität dadurch erwiesen wird, daß bei fortgesetzter Wechselwegnahme die Streckenverhältnisse sich oft schon nach wenigen Schritten wiederholen. Dadurch zeigt er, daß man unter *ἀποφαίνειν* wirklich ein „Beweisen“ (und nicht nur ein „Aufzeigen“) verstehen darf und daß diese Beweise auch in einer Schulstunde, wie es sich Platon denkt, durchführbar waren.

Kurt Vogel (München).

Millás Vallierosa, J. M.: Über die Authentizität eines astronomischen Werkes von R. Abraham ibn'Ezra. *Isis*, Cambridge, Mass. 40, 32—33 (1948) [Spanisch].

In *Isis*, Cambridge, Mass. 35, 300 (1944) erwähnt L. Thorndyke 3 lateinische Handschriften der Astronomie eines Abraham Iudaeus. Demgegenüber stellt Verf. auf Grund einer weiteren Toledaner Handschrift Abraham ibn Ezra (1095?—1167) als Autor fest und bestimmt das Jahr der lateinischen Übersetzung: 1154.

J. E. Hofmann (Karlsruhe).

Birkenmajer, Alexandre: Pierre de Limoges commentateur de Richard de Fournival. *Isis*, Cambridge, Mass. 40, 18—31 (1948).

Auf Grund eingehenden Schriftenvergleichs und sorgfältiger Textstudien gibt Verf. neue Einzelheiten über den gelehrten Dichter und Büchersammler Richard von Fournival (* 1201, † vor 1260, 1240/46 Domherr der Kathedrale zu Amiens). Seine (anonyme) Nativität ist enthalten in Vat. regin. lat. 1261 (vor 1306), Oxford, Hertford Coll. 4 (15. Jh.) und London, Brit. Mus. Sloane 3281, eine kleine Einführung in die Astrologie (vor 1239) in Reg. 1261, die den Einzelrechnungen zugrunde liegenden Toulouser Tafeln (in chr. Zeitrechnung im Gegensatz zu den nach arabischer Zeitrechnung ausgeführten Toletanischen Tafeln) unvollständig in Oxford, Bodlei. 464 (um 1318), vollständig in Paris, Bibl. nat. fonds lat. 16658. Die vom Verf. Krakau 1922 herausgegebene *Biblionomia* (nach 1243) ist das Inventar Richards. Sein Nachlaß ging an Pierre de Limoges (blühte zwischen 1267 und 1295), der außer Regin. 1261 auch viele andere der übernommenen astrologischen Handschriften genau durchgearbeitet und mit Anmerkungen versehen hat. Darin bezieht er sich fortwährend auf eine große lateinische Exzerptensammlung astrologischen Inhaltes, den *liber magnus iudiciorum*, von dem ein umfangreiches Bruchstück in cod. Paris. 7320 enthalten ist. — Ein sehr wertvoller Beitrag zur Astrologie des 13. Jh.!

J. E. Hofmann (Karlsruhe).

Thorndike, Lynn: Thomas Werkwoth on the motion of the eighth sphere. *Isis*, Cambridge, Mass. 39, 212—215 (1948).

Verf. gibt die mit sorgfältiger literarischer Einleitung versehene englische Übersetzung eines kurzen Traktats aus Oxford, Bodlei. Digby 97, worin Thomas nach

summarischen Angaben über arabische Vorgänger (in unrichtiger Reihenfolge) die Beobachtungsergebnisse der älteren Oxforder Schule (1301/57) mit einem eigenen von 1395 vereinigt und in einer (verschollenen) Tafel zusammenfaßt. Bemerkenswert ist die frühe Erwähnung des Torquetums. *J. E. Hofmann* (Karlsruhe).

Shapley, Dora: *Pre-Huygenian observations of Saturn's ring*. Isis, Cambridge, Mass. 40, 12—17 (1949).

Diese von der History of Science Society mit einem Geldpreis bedachte Zusammenfassung der Saturn-Beobachtungen von Galilei (seit 1610) bis zur Lösung des merkwürdigen Gestaltträtsels durch Huygens (1656) ist auf die Dissertation von E. M. Beima, Leiden 1642, auf die Bemerkungen in den Huygens-(Œuvres XV, d. Haag 1925 und auf einiges aus der dort erwähnten Originalliteratur gestützt. Der Kenner findet zwar nichts Neues, wohl aber einen verdienstvollen Überblick über die einzelnen Beobachtungstatsachen und ihre zum Teil sehr phantastische Deutung. *J. E. Hofmann* (Karlsruhe).

Boyer, C. B.: *Newton as an originator of polar coordinates*. Amer. math. Monthly 56, 73—78 (1949).

Verf. hebt hervor, daß sich Polarkoordinaten längst vor Jak. Bernoulli (1691, 1694) und Fontana (1784) in der Newtonschen Methodus fluxionum (erste Niederschrift 1671, Erstdruck 1736) vorfinden. Er hat jedoch übersehen, daß schon Gregory (Geometriae pars universalis, 1668 und Aufzeichnungen, vgl. Memorial volume, ed. H. W. Turnbull, London 1939) von Polarkoordinaten Gebrauch macht, wahrscheinlich in Anschluß an damals noch unedierte Arbeiten Torricellis, über deren Inhalt er während seiner italienischen Studienzeit (1663/68) etwas gehört haben mag. Newton führt Gregorys Gedanken (allerdings sehr selbständig) weiter.

J. E. Hofmann (Karlsruhe).

• **Fueter, Rudolf:** *Leonhard Euler*. (Beihefte zu „Elemente der Math.“ Nr. 3.) Basel: Verlag Birkhäuser 1948. 24 S. fr. 3,50.

Diese auf knappstem Raum zusammengedrückte Biographie gibt trotz des Verzichts auf ausgeführte Details eine vorzügliche Übersicht über Leben, Schaffen und Nachwirken Eulers.

J. E. Hofmann (Karlsruhe).

Haantjes, J.: *Über einige Grundbegriffe aus der Geometrie*. Euclides, Groningen 23, 258—270 (1948) [Holländisch].

Ein Vortrag über die Wandlungen, die die Grundbegriffe der Geometrie, begonnen mit Euklid, durch Descartes, Newton und Leibniz, Riemann, Poncelet, Lobatschewsky und Bolyai, Hilbert erfahren haben. *Bachmann*.

Whittaker, Edmund: *Laplace*. Amer. math. Monthly 56, 369—372 (1949).

Kneser, Hellmuth: *Felix Klein*. Zu seinem hundertsten Geburtstage am 25. April 1949. Arch. Math., Oberwolfach 1, 413—417 (1949).

Analysis.

Mengenlehre:

Sierpiński, Waclaw: *Sur une décomposition de la droite*. Comment. math. Helvetici 22, 317—320 (1949).

Verf. beweist folgenden Satz: Unter der Voraussetzung $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ kann man die Gerade so in 2^{\aleph_0} punktfremde Mengen von der Mächtigkeit 2^{\aleph_0} zerlegen, daß jede dieser Teilmengen bei jeder Translation der Geraden in sich bis auf höchstens abzählbar viele Punkte reproduziert wird. — Beweis-Skizze: Sei eine Wohlordnung $X = \{x_1, x_2, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\xi, \dots\}$ ($\xi < \Omega$) der Menge X aller reellen Zahlen angenommen. Durch transfinite Induktion wird eine Teilfolge $\{p_\alpha\}_{\alpha < \Omega}$ dieser Folge X definiert auf folgende Weise: $p_1 = x_1$; wenn alle p_ξ mit $\xi < \alpha < \Omega$ definiert sind, sei P_α die Menge aller Zahlen $p_\xi \pm x_{\xi_1} \pm \dots \pm x_{\xi_n}$,

wo $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n < \alpha$ und n eine beliebige natürliche Zahl ist; das erste $x_\xi \in P_\alpha$ in der Folge X wird p_α genannt. — Sei $Z = \sum_{\lambda < \Omega} Z_\lambda$ eine beliebige Zerlegung der

Menge Z aller Ordnungszahlen $< \Omega$ in \aleph_1 fremde Mengen Z_λ von der Mächtigkeit \aleph_1 ; E_λ bedeute die Menge aller Zahlen $p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm \dots \pm x_{\xi_n}$ mit $\xi_1, \dots, \xi_n < \alpha$ und $\alpha \in Z_\lambda$. — Durch einfache Schlüsse wird gezeigt, daß die E_λ untereinander fremd sind und daß für jedes $\lambda < \Omega$ die Menge der Punkte von E_λ , welche diesem E_λ bei irgendeiner Translation der Zahlengeraden in sich einführt werden, höchstens abzählbar ist, sowie daß dasselbe zutrifft auf die Menge $E = X - \sum_{\lambda < \Omega} E_\lambda$. Dann stellt $X = (E + E_1) + \sum_{1 < \lambda < \Omega} E_\lambda$ eine

der behaupteten Zerlegungen dar. — Verf. bemerkt, daß es nur einer geringen Modifikation dieses Beweises bedarf, um folgenden Satz, unabhängig von der Kontinuumhypothese, zu erhalten: Man kann die Gerade so in 2^{\aleph_0} fremde Mengen von der Mächtigkeit 2^{\aleph_0} zerlegen, daß jede dieser Mengen bei jeder Translation der Geraden in sich reproduziert wird, abgesehen von einer Menge, deren Mächtigkeit geringer als 2^{\aleph_0} ist.
Neumer (Mainz).

Sierpiński, Waclaw: Sur la division des types ordinaux. Fundam. Math., Warszawa 35, 1—12 (1948).

Verf. beweist eine Reihe von Sätzen über die Teilbarkeit der Ordnungstypen. Zunächst die folgenden beiden Sätze, die 1926 in den C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III. 19, 299—330 von A. Lindenbaum und A. Tarski ohne Beweis mitgeteilt wurden: Ist μ eine Ordnungszahl $\neq 0$ und sind α, β zwei Ordnungstypen mit $\mu\alpha = \mu\beta$, dann gilt $\alpha = \beta$. Verf. bemerkt, daß der Satz noch gilt z. B. für $\mu = \omega^* + \omega$, $\mu = \eta + 2$. — Sind α, β zwei Ordnungstypen und ist n eine natürliche Zahl, so folgt aus $\alpha n = \beta n$ auch $\alpha = \beta$. Verf. zeigt ferner, daß der Satz auch für $n = \omega$ richtig ist und bemerkt, daß die Richtigkeit erhalten bleibt oder nicht, je nachdem man für n eine beliebige Ordnungszahl 1. oder 2. Art wählt. Falsch ist der Satz u. a. für $n = \omega + \omega^*$, $\omega^* + \omega$, $\eta, \eta + 1$. — Von den nun aufgeführten Teilbarkeitseigenschaften gewisser Ordnungstypen seien hervorgehoben: Es gibt unabzählbar viele verschiedene Ordnungstypen, die zu je zweien rechte Teiler voneinander sind; hierzu gehören die Typen $\alpha\eta$, wo α eine Ordnungszahl $< \Omega$. — Es gibt unabzählbare viele verschiedene Ordnungstypen, die zu je zweien linke Teiler voneinander sind; dazu gehören die Typen $\varphi_\alpha = \omega_\Omega^* \omega_{\alpha+1}$, wo $\alpha < \Omega$. — Offen bleiben die Fragen, ob es zwei verschiedene abzählbare Ordnungstypen gibt, die einander von links teilen, ferner, ob es zwei verschiedene Ordnungstypen gibt, die sowohl rechte als linke Teiler voneinander sind. — Zu jedem Ordnungstypus α gibt es einen Ordnungstypus ξ mit $\xi\alpha = \alpha\xi = \xi$; ein solcher ist $\xi = \varphi\psi$, wo $\varphi = \alpha^{\omega^*}$, $\psi = \dots + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta + \alpha\beta + \alpha + \alpha\gamma + \alpha^2\gamma + \alpha^3\gamma + \dots$ und wobei $\alpha = \beta + 1 + \gamma$ eine beliebige Zerlegung von α in diese Form ist. Nach einer vom Verf. erwähnten Bemerkung von M. Sikorski ist im Sinne der Hausdorffschen Potenzdefinition $\xi = (\beta + 1 + \gamma)^{\omega + \omega^*}$. — Ist α ein Ordnungstypus und k eine natürliche Zahl > 1 , so folgt aus $\alpha k = \alpha$ auch $\alpha l = \alpha$ für jede andere natürliche Zahl. Dasselbe gilt auch bezüglich $k\alpha = \alpha$.
Neumer (Mainz).

Sierpiński, Waclaw: Sur la différence de deux nombres cardinaux. Fundam. Math., Warszawa 34, 119—126 (1947).

Wenn m und n zwei Kardinalzahlen sind, sagt man, daß die Differenz $m - n$ existiere, wenn es genau eine Kardinalzahl p gibt, so daß $m = n + p$; man schreibt dann $m - n = p$. Mittels des Auswahlaxioms ergibt sich bekanntlich, daß, falls m nicht endlich, die Differenz $m - n$ dann und nur dann existiert, wenn $n < m$ (so daß $m - n = m$). — Im Hinblick auf diesen Sachverhalt beweist Verf. ohne Zuhilfenahme des Auswahlaxioms eine Reihe von Eigenschaften der Differenz zweier Kardinalzahlen; die Beweise stützen sich auf folgendes Lemma von

A. Tarski: Zu zwei Mengen A und B mit $A \sim B$ gibt es Mengen C_1, C_2, D_1, D_2 mit den Eigenschaften: $A - B = C_1 + C_2$, $B - A = D_1 + D_2$, $C_1 C_2 = D_1 D_2 = 0$, $C_1 \sim D_1$, $C_2 + AB \sim AB \sim D_2 + AB$. [Verf. versteht unter $A - B$ die sonst mit $A - AB$ bezeichnete Menge. Anm. des Ref.] Nun die vom Verf. bewiesenen Sätze: Zugleich mit $n - p$ existiert die Differenz $(m + n) - p$ und ist gleich $m + (n - p)$ für jedes beliebige m . — Zugleich mit $m - (n + p)$ existiert die Differenz $m - n$ und ist gleich $[m - (n + p)] + p$. — Folgerungen: Wenn eine der Zahlen $m - (n + p)$ und $(m - n) + p$ existiert, existiert auch die andere und beide sind gleich. — Wenn $m - n$ und $n - p$ existieren, existiert auch $m - (n - p)$ und ist gleich $(m - n) + p$. — Ferner gilt der Satz: Wenn $m > n$, wo n natürliche Zahl, so existiert $m - n$. — Folgerung: Aus $m + n = n + n$ folgt $m = n$, falls n natürliche Zahl. — Sodann der Satz: $m - \aleph_0$ existiert dann und nur dann für jedes $m > \aleph_0$, wenn jede nicht endliche Kardinalzahl $\geq \aleph_0$ ist. — Endlich der abschließende Satz: Die Annahme, daß die Differenz $m - n$ für alle Kardinalzahlen $n < m$ existiert, ist dem Auswahlaxiom gleichwertig.

Neumer (Mainz).

Bagemihl, Frederick: Some theorems on powers of cardinal numbers. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 341—346 (1948).

Das Kontinuumproblem hat Anlaß zur Beschäftigung mit Potenzen von Kardinalzahlen gegeben. Verf. leitet einige Sätze her über Kardinalzahlen, welche keine Potenzen (gewisser) anderer Kardinalzahlen sind oder möglicherweise nur „niedrige“ Potenzen einer (gegebenen) Kardinalzahl. — Unter einer wachsenden Folge von Kardinalzahlen versteht Verf. eine nicht leere Menge von Kardinalzahlen, unter denen es keine größte gibt. — Mit $\text{cf}(\alpha)$ bezeichnet er den Index der kleinsten Anfangszahl $\omega_{\text{cf}(\alpha)}$, mit welcher die Limeszahl α konfinal ist. — Satz 1: Ist α eine Limeszahl und $\varphi \geq \text{cf}(\alpha)$, dann gilt für jede Kardinalzahl \aleph : $\aleph_\alpha \neq \aleph_\varphi$. Der Beweis erfolgt mit Verwendung der Jourdainischen Verallgemeinerung der bekannten Ungleichung von König zwischen einem Produkt und einer Summe von Kardinalzahlen. — Hilfssatz 2: Wenn $\mathfrak{C} < \mathfrak{B} < \aleph$ und \aleph keine Potenz von \mathfrak{B} , so ist \aleph auch keine Potenz von \mathfrak{C} . — Satz 2: Sei \mathfrak{B} eine Kardinalzahl und S eine wachsende Folge von Kardinalzahlen, welche zu jedem ihrer Elemente ein größeres enthält, das eine Potenz von \mathfrak{B} ist; dann ist der Limes von S niemals Potenz eines $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$. — Satz 3: Ist \aleph_φ eine beliebige unendliche Kardinalzahl und μ eine beliebig große Ordnungszahl, dann gibt es ein $\varrho > \mu$ und ein $\kappa > 0$, so daß $\aleph_\varphi^{\aleph_\beta}$ ($\beta < \kappa$) niemals transfinite Potenz einer Kardinalzahl $\leq \aleph_\varphi$ ist. Zum Beweis wird in Verallgemeinerung eines Verfahrens von Tarski folgende \aleph -Funktion durch transfinite Induktion definiert:

1. $\aleph_{\pi(\varphi, 0)} = \aleph_\varphi$; 2. $\aleph_{\pi(\varphi, \alpha + 1)} = \aleph_{\varphi^{\aleph_{\pi(\varphi, \alpha)}}}$;
3. $\aleph_{\pi(\varphi, \alpha)} = \sum_{\xi < \alpha} \aleph_{\pi(\varphi, \xi)}$, wenn α Limes-Zahl.

Nach Satz 2 ist $\aleph_{\pi(\varphi, \alpha)}$ für eine Limes-Zahl α keine Potenz von \aleph_φ . Mittels eines Satzes von Tarski wird dann bewiesen: Hilfssatz 4: Es ist $\aleph_{\pi(\varphi, \alpha)}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\pi(\varphi, \alpha)}$, wenn φ beliebig, α Limes-Zahl und $\beta < \text{cf}(\alpha)$. — Wählt man nun eine Limes-Zahl $\alpha > \mu$ mit $\text{cf}(\alpha) > 0$ und setzt $\varrho = \pi(\varphi, \alpha)$, $\kappa = \text{cf}(\alpha)$, so ergibt sich vermöge Hilfssatz 2 und 4 sofort der Satz 3.

Neumer (Mainz).

Sierpiński, Waclaw: L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix. Fundam. Math., Warszawa 34, 1—5 (1947).

Sierpiński, Waclaw: Sur un théorème de M. Tarski concernant les alephs. Fundam. Math., Warszawa 34, 6—8 (1947).

Sierpiński, Waclaw: Sur un ensemble plan qui se décompose en 2^{\aleph_0} ensembles disjoints superposables avec lui. Fundam. Math., Warszawa 34, 9—13 (1947).

Im Jahre 1926 hatten A. Lindenbaum und A. Tarski [Communications sur les recherches de la théorie des ensembles. C. R. Soc. Sci., Lett. Varsovie, Cl. III. 19, 299—330 (1926)] eine Reihe von mengentheoretischen Sätzen angekündigt, für die auch in der Zwischenzeit kein Beweis veröffentlicht wurde. Für verschiedene dieser Behauptungen wird er hier vom Verf. geliefert. — Der eine dieser Sätze ist, daß die verallgemeinerte Kontinuumshypothese, d. h. die Behauptung, daß es keine Kardinalzahl n mit der Eigenschaft $m < n < 2^m$ gibt, falls m eine Kardinalzahl $\geq \aleph_0$ ist, das Auswahlaxiom als Konsequenz hat. Zum Beweise werden zwei Hilfsätze benutzt: I. Sei $U(M)$ die Menge aller Teilmengen von M . Wir können dann für jedes M eine wohlgeordnete Menge von Elementen von $UUU(M)$ angeben, deren Mächtigkeit weder kleiner noch gleich der Mächtigkeit von M ist. II. Falls p und q zwei Kardinalzahlen mit der Eigenschaft $p + q = 2^{2^p}$ sind, ist $q \geq 2^p$. Beide Sätze werden natürlich ohne Auswahlaxiom bewiesen. — Ein zweiter Satz betrifft die Behauptung, daß für jede Kardinalzahl $m \leq 2^{\aleph_0}$ eine ebene Menge P existiert, die in m untereinander disjunkte Teile zerfällt, von denen jeder mit P zur Deckung gebracht werden kann. Tatsächlich kann der Verf. folgendes zeigen: Falls E irgendeine Menge von reellen Zahlen aus dem Intervall $0 \leq t < 1$ ist und $0 \in E$ ist, kann man eine Menge P von komplexen Zahlen und eine Menge F von untereinander disjunkten Untermengen von P angeben, deren jede mit P zur Deckung gebracht werden kann, und zwar so, daß F die Mächtigkeit von E hat und ihre Vereinigungsmenge gleich P ist. Der Beweis geschieht ohne Benutzung des Auswahlaxioms. — Der dritte Satz ist der folgende: Es bedeute $\aleph(m)$, falls m eine nicht endliche Kardinalzahl ist, das kleinste Alef, das nicht $\leq m$ ist. Nach Tarski soll dann die Äquivalenz der folgenden beiden Behauptungen ohne Auswahlaxiom gezeigt werden können: 1. m ist ein Alef. 2. $[m + \aleph(m)] - m = \aleph(m)$. Dabei heißt $p = n - m$, wenn p die einzige Kardinalzahl ist, für die $n = m + p$. Verf. hält die Richtigkeit der Tarskischen Behauptung für unwahrscheinlich, da man sonst, wie er zeigt, ohne Auswahlaxiom beweisen könnte, daß jede nicht endliche Kardinalzahl $\geq \aleph_0$ ist.

W. Ackermann (Lüdenscheid).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Marczewski, Edward: Ensembles indépendants et leurs applications à la théorie de la mesure. Fundam. Math., Warszawa 35, 13—28 (1948).

Es bezeichne E^i die Menge E oder ihre Ergänzung, je nachdem $i = 1$ oder 0 ist. Man betrachte die beiden folgenden Bedingungen bezüglich einer Klasse K von Teilmengen E einer Menge X : a) für jede endliche bzw. abzählbar unendliche Folge von $E_k \in K$ und $i_k = 0$ oder 1 ist $E_1^{i_1} \cdots E_n^{i_n}$ bzw. $E_1^{i_1} \cdot E_2^{i_2} \cdots \neq 0$; b) zu jeder Mengenfunktion $0 \leq \nu(E) \leq 1$ über K gibt es eine endlich bzw. abzählbar unendlich additive Maßfunktion μ in dem kleinsten K enthaltenden, in seinen Elementen endlich bzw. abzählbar unendlich additiven Körper so, daß $\mu(E) = \nu(E)$ für $E \in K$ ist. Dann wird gezeigt, daß die beiden Bedingungen äquivalent sind und das Bestehen folgender Beziehung nach sich ziehen: c) für alle endlich bzw. abzählbar unendlich vielen verschiedenen $E_k \in K$ gilt $\mu(E_1 \cdots E_n) = \mu(E_1) \cdots \mu(E_n)$ bzw. $\mu(E_1 \cdot E_2 \cdots) = \mu(E_1) \mu(E_2) \cdots$. Damit werden die Begriffe und Beziehungen der a) mengentheoretischen und der c) in bezug auf eine Maßfunktion wahrscheinlichkeitstheoretischen endlich bzw. abzählbar unendlichen Unabhängigkeit festgelegt und geklärt. Nebenbei ergibt sich, daß es in bezug auf geeignete Maßfunktionen μ einerseits c)-Mengen beliebig hoher Mächtigkeit geben, andererseits ein mit dem Entfernungsmaß $\varrho_\mu(E_1, E_2) = \mu[(E_1 - E_2) + (E_2 - E_1)]$ als metrischer Raum behandelter Körper von Mengen E nicht separabel sein kann. Szentmártony.

Hadwiger, H.: Une mesurabilité moyenne pour les ensembles de points. Fundam. Math., Warszawa 34, 293—305 (1947).

Nello spazio euclideo R a k dimensioni, s'indicano: con $\xi_i (i = 1, 2, \dots, k)$ le

coordinate, con $P = P(\xi_i)$ un generico punto, con W un ipercubo formato dai punti $P(\xi_i)$ tali che $0 \leq \xi_i < \omega$ (essendo ω un numero positivo arbitrariamente prefissato). Si chiama „traslazione X di W in sè stesso“ ogni trasformazione biunivoca di $W = X(W)$ in sè stesso, definita dalla formula: $X[P(\xi_i)] = P(\xi_i + \tau_i)$, ove i k numeri reali τ_i („componenti“ della X) sono arbitrari e fissi per la traslazione, e ove le k somme $\xi_i + \tau_i$ sono intese mod ω . — Per effetto di n traslazioni X_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) di W in sè stesso, da un qualunque insieme di punti A , contenuto in W , s'ottengono certi n insiemi $A_\nu = X_\nu(A)$. Per ogni valore dell'indice ν e per ogni punto P di W , s'indica con $\vartheta_\nu(P)$ il numero 1 o il numero 0, secondochè P appartiene ad A_ν o no. Un insieme $A \subset W$ è chiamato „misurabile in media (relativamente a W)“, se esiste un numero $\Phi(A)$ tale che ad ogni $\varepsilon > 0$ (sia pur piccolo), è possibile far corrispondere un numero finito n di traslazioni X_ν di W in sè stesso, in modo che risulti $\left| \Phi(A) - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \vartheta_\nu(P) \right| < \varepsilon$, qualunque sia P in A .

Il numero $\Phi(A)$ è chiamato „misura media di A (relativamente a W)“. È lecito, nella definizione, sostituire W con R purchè, in tal caso, si sostituiscano le „traslazioni in sè“, con le traslazioni in senso ordinario in R . — L'A. studia le prime proprietà di questo nuovo concetto di misura. Tullio Viola (Roma).

Henstock, R.: On interval functions and their integrals. II. J. London math. Soc. **23**, 118—128 (1948).

1. Voraus kurz den Inhalt der vorausgehenden Arbeit gleichen Titels des Verf. [J. London math. Soc. **21**, 204—209 (1946)]. Bei einer Intervallfunktion $g(a \mapsto b)$ hat man die vier Werte g_i , $i = 1, \dots, 4$, zu unterscheiden, je nachdem das Intervall $a \mapsto b$ gleich ist $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ oder (a, b) . Dies wird bei der Definition der (bezüglich der Additivität) singulären Punkte y der Intervallfunktion g in folgender Weise berücksichtigt. Für $x < y < z$ sei $D(x, y, z)$ das Maximum der $4^3 + 4^4$ Werte von

$$|g_{i_1}(x \mapsto z) - (g_{i_2}(x \mapsto y) + g_{i_3}(y \mapsto z))|$$

und

$$|(g_{i_1}(x \mapsto y) + g_{i_2}(y \mapsto z)) - (g_{i_3}(x \mapsto y) + g_{i_4}(y \mapsto z))|,$$

und es sei

$$\sigma(y) = \overline{\lim} D(x, y, z) \text{ für } x, z \rightarrow y.$$

Die singulären Punkte y von g , d. h. solche mit $\sigma(y) > 0$, sind höchstens abzählbar mit endlichem $\sum \sigma(y_n)$, falls das untere und das obere Burkill-Integral von g endlich sind. In diesem Falle führt Verf. die von ihm als k -Integration bezeichnete Methode ein, welche untere und obere k -Integrale von g liefert, die additiv sind und im Falle, daß g selbst additiv ist, mit g übereinstimmen (was bekanntlich bei den Burkill-Integralen nicht zutrifft). Dies gelingt dadurch, daß man von vorne herein jedem singulären Punkt eine der vier möglichen „Klammervorschriften“ (nämlich als Teilungspunkt nur dem rechts oder links anschließenden Teilungsintervall, oder keinem, oder beiden anzugehören) als die „richtige“ zugeordnet wird: Bei der Definition der k -Integrale werden dann nur solche Folgen von Intervallteilungen betrachtet, welche schließlich jeden singulären Punkt von g als Teilungspunkt enthalten [S. Pollard, The Stieltjes integral and its generalizations, Quart. J. Math. **49**, 73—138 (1923)] und zwar mit der „richtigen“ Klammervorschrift (Methode von P. Dienes). Für die k -Integrale werden außerdem zwei Approximationssätze bewiesen. — 2. In der zweiten Arbeit beweist Verf. Ungleichungen, welche sozusagen die Abweichung des unteren bzw. oberen Burkill-Integrals von der Ober- bzw. Unteradditivität durch gewisse Teilsummen der $\sigma(y)$ abschätzen, und zieht eine Reihe von Folgerungen daraus. Verallgemeinert man die k -Integration, indem man nicht eine bestimmte Klammervorschrift, sondern eine gewisse, sonst aber beliebige Menge K von Klammervorschriften als „richtig“ zuläßt, so erhält man K -Integrale.

Hierzu ergibt sich: Bezeichnet K_0 die Menge aller möglichen Klammervorschriften, so ist im Fall der Endlichkeit beider Burkill-Integrale die Intervallfunktion g dann und nur dann K_0 -integrierbar (zum Werte A), wenn für g das Unterteilungsintegral im Sinne der Verfeinerungsordnung aller endlichen Intervallteilungen existiert (und den Wert A hat) [wegen Unterteilungsintegral vgl. B. C. Getchell, Bull. Amer. math. Soc., II. s. 41, 413—418 (1935); dies. Zbl. 11, 395 und T. H. Hildebrandt, Amer. math. Monthly 45, 265—278 (1938); dies. Zbl. 19, 56]. Das obere Burkill-Integral $\int_T |g(I)| = v(T)$ über das Grundintervall T heißt die Variation von

g . Setzt man $j(y) = \lim v([x, z])$ für $x, z \rightarrow y$ bei $x < y < z$, so heißen die Punkte y mit $j(y) > 0$ V -singulär. Jeder singuläre Punkt im Sinne von 1. ist V -singulär, so daß eine Integrationsmethode, welche alle V -singulären Punkte als Teilungspunkte heranzieht, gegenüber der k -Integration nichts Neues ergibt. $g(I)$ heißt „bei Unterteilung nicht steigend“, wenn $g(I_1) + g(I_2) \leq g(I_3)$ immer, wenn $\bar{I}_1 \bar{I}_2$ einpunktig und $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}_3$ („stark oberadditiv“). Ist g stark oberadditiv und das untere B -Integral $\neq -\infty$, so ist g K -integrierbar mit einem K -Integral unabhängig von K und $\leq g$. Es folgt eine Anwendung auf Stieltjes-Integration und ein abgrenzendes Beispiel zu einem vorausgehenden Satz.

Aumann (Regensburg).

Ważewski, Tadeusz: Sur l'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites réelles ou complexes. Ann. Soc. Polonaise Math. 20, 81—120 (1948).

Es sei ein reeller oder komplexer Vektor $F(X, Y)$ mit $F = (f^1, \dots, f^n)$, $X = (x_1, \dots, x_p)$, $Y = (y_1, \dots, y_q)$ gegeben, dessen Komponenten stetige partielle Ableitungen $f_{x_\alpha}^v, f_{y_\beta}^v$ nach den reellen oder komplexen Veränderlichen x_α, y_β in einer offenen Menge M haben. Die Hermitesche Form

$$\sum_{v=1}^n \sum_{\alpha} \sum_{\beta} f_{x_\alpha}^v \overline{f_{y_\beta}^v} dx_\alpha \overline{dy_\beta} = \sum_v \left| \sum_{\alpha} f_{x_\alpha}^v dx_\alpha \right|^2$$

heißt die metrische Form von G in bezug auf X . Wird $a_{\alpha\beta} = \sum_v f_{x_\alpha}^v \overline{f_{x_\beta}^v}$ gesetzt, so ist $\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} \xi_\alpha \overline{\xi_\beta}$ ebenfalls eine Hermitesche Form; ihre Eigenwerte s sind sämtlich reell und ≥ 0 und können daher so angeordnet werden, daß $0 \leq s_1(X, Y) \leq \dots \leq s_p(X, Y)$ gilt. Die Zahlen

$$\underline{\text{all}}_X(F, X, Y) = \sqrt{s_1(X, Y)}, \quad \overline{\text{all}}_X(F, X, Y) = \sqrt{s_p(X, Y)}$$

heißen kleinste und größte relative Änderung von F im Punkt X, Y in bezug auf X (allongement inférieur bzw. supérieur). Entsprechend werden die relativen Änderungen in bezug auf Y definiert. Wird in einem Raum R mit $\varrho(U, V)$ der Abstand zweier Punkte U, V dieses Raumes bezeichnet, so ist

$$\underline{\text{all}}_X(F, X, Y) = \lim_{X_1, X_2 \rightarrow X} \frac{\varrho(F(X_1, Y), F(X_2, Y))}{\varrho(X_1, X_2)},$$

und $\overline{\text{all}} = \overline{\lim}$. — Es sei jetzt $q = n$ und M die Menge der Punkte X, Y , für die $\varrho(X - A) < r \leq \infty$, $\varrho(Y - B) < R \leq \infty$ gilt, und es sei $F(A, B) = 0$. Ferner möge es zwei Zahlen $\Omega \geq 0$, $\omega > 0$ geben, so daß in M $\underline{\text{all}}_X(F, X, Y) \leq \Omega$, $\underline{\text{all}}_Y(F, X, Y) \geq \omega$ gilt. Dann gibt es einen Vektor $\Phi(X) = (\varphi^1(X), \dots, \varphi^n(X))$ mit folgenden Eigenschaften: (a) $\Phi(X)$ ist stetig in $\varrho(X - A) < r_0$ mit $r_0 = \min(r, R\omega/\Omega)$, (b) $\Phi(A) = B$, (c) $F(X, \Phi(X)) \equiv 0$ in $\varrho(X - A) < r_0$. $\Phi(X)$ ist hierdurch eindeutig bestimmt, ist stetig differenzierbar und erfüllt u. a. die Ungleichungen $\underline{\text{all}}_X(\Phi, X) \leq \Omega/\omega$. Verf. behandelt mit seinem Verfahren noch weitere Probleme ähnlicher Art, z. B. gestörte Gleichungen. Kamke (Tübingen).

Császár, Akos: Sur les fonctions à variation bornée d'ordre supérieur. Ann. sci. École norm. sup., III. s. **64**, 275—284 (1948).

Soit $[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$ la différence divisée de la fonction $f(x)$ sur les points x_0, x_1, \dots, x_n , donc

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n; f]}{x_0 - x_n}, \quad [x_0; f] = f(x_0).$$

La fonction $f(x)$ étant réelle et définie sur un ensemble linéaire E , posons

$$\Omega_n(a, b; f) = \lim_{x_i \in [a, b]} (n-1)! |[x_0, x_1, \dots, x_n; f]| \delta$$

où δ est la longueur du plus petit intervalle contenant les points x_0, x_1, \dots, x_n .

Par définition, la fonction $f(x)$ est de la classe (R_n^*) sur E s'il existe un nombre fini M tel que pour toute suite finie (a_v, b_v) d'intervalles n'empiétant pas et tels que $a_v, b_v \in E$, on ait $\sum_v \Omega_n(a_v, b_v; f) < M$. La fonction $f(x)$ est de la classe (S_n^*)

sur E si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble E peut être recouvert par une suite finie (a_v, b_v) d'intervalles tels que l'on ait $\sum_v \Omega_n(a_v, b_v; f) (b_v - a_v) < \varepsilon$. La fonction

$f(x)$ est de la classe $(R_n G^*)$ resp. $(S_n G^*)$ sur E , si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $f(x)$ étant de la

classe (R_n^*) resp. (S_n^*) sur chacun des ensembles E_k . L'aut. démontre alors que: 1°. Pour que la dérivée faible d'ordre n ,

$$f^n(x) = \lim_{\substack{x_i \rightarrow x \\ \min x_i \leq x \leq \max x_i}} n! [x_0, x_1, \dots, x_n; f]$$

existe presque partout sur E , il faut et il suffit que E soit la somme d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble sur lequel $f(x)$ est de la classe $(R_n G^*)$. 2°. Une propriété analogue a lieu pour la dérivée forte d'ordre n ,

$$f^{[n]}(x) = \lim_{x_i \rightarrow x} n! [x_0, x_1, \dots, x_n; f],$$

la classe $(R_n G^*)$ étant remplacée par $(S_{n+1} G^*)$ dans l'énoncé du théorème correspondant.

T. Popoviciu (Cluj).

Reichelderfer, P. V.: On the definition of the essential multiplicity for continuous transformations in the plane. Trans. Amer. math. Soc. **62**, 284—314 (1947).

T ou $t(w) = x(u, v) + iy(u, v)$ étant une transformation du plan (u, v) , continue et bornée pour $w = u + iv \in S$, où S est un ensemble borné, $N(\mathfrak{z}, T, E)$ est le nombre des points $w \in S \cdot E$ pour lesquels $t(w) = \mathfrak{z}$. C'est la multiplicité „brute“ au point \mathfrak{z} . Les études sur la notion d'aire ont conduit T. Radó [Duke Math. J. **4**, 189—221 (1938); ce Zbl. **19**, 88] à définir la „multiplicité essentielle“ $k(\mathfrak{z}, T, E)$, lorsque E est un domaine ou une région (aussi T. Radó, Length and area. New York 1948, p. 269). L'auteur donne une définition de la multiplicité essentielle applicable à un E quelconque, qui est équivalente à la précédente pour $E =$ domaine ou région, quoiqu'elle en diffère formellement. Cette multiplicité essentielle $eN(\mathfrak{z}, T, E)$ est égale à k lorsque: 1. Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une T_1 continue sur S , telle que $\varrho(T_1, T, S)$, borne supérieure de la distance de deux points correspondant par T_1 et T à un point de S , est $< \varepsilon$, avec $N(\mathfrak{z}, T_1, E) = k$. 2. Il existe un $\zeta > 0$ tel que pour chaque T_2 continue sur S , avec $\varrho(T_2, T, S) < \zeta$ on a $N(\mathfrak{z}, T_2, E) \geq k$. On a $eN(\mathfrak{z}, T, E) = +\infty$ si $\delta(k)$ existe pour chaque $k > 0$, telle que pour toute T_3 continue sur S , avec $\varrho(T_3, T, E) < \delta$ on a $N(\mathfrak{z}, T_3, E) \geq k$. L'équivalence des deux définitions, immédiate pour $E =$ région, est établie, pour $E =$ domaine, en se reportant à la signification topologique de la multiplicité essentielle, comme nombre de continus-images essentiels du point \mathfrak{z} , relativement à T .

Călugăreanu (Cluj).

Allgemeine Reihenlehre:

●Hardy, G. H.: *Divergent series*. Oxford: At the Clarendon Press (Geoffrey Cumberlege). 1949. XIV, 396 S. 30 s. net.

Außer den beiden Büchern von Borel (2. ed. Paris 1928) und Moore (New York 1938; dies. Zbl. 19, 18) fanden sich in der mathematischen Literatur bisher nur kürzere Einzeldarstellungen der Theorie der divergenten Reihen vor (z. B. von Kogbetliantz, Andersen, Karamata, Szász, Borgers), deren Verf. sich mit einem gedrängten Bericht über die Ergebnisse auf diesem Gebiet oder mit der Bearbeitung eines mehr oder weniger engen Teilgebietes begnügten. Ein neueres zusammenfassendes, selbständiges Werk über divergente Reihen, das zugleich Form und Methode dieses reichhaltigen und schönen Gebietes ausführlich in lehrbuchmäßiger Form darstellt, fehlte ganz, — trotz dem großen Interesse, das die Mathematiker diesem Gegenstand in den letzten Jahrzehnten entgegenbrachten. Das vorliegende Werk des großen englischen Gelehrten füllt diese Lücke nun in geradezu idealer Weise aus. Hat doch der Verf. selbst — seit 1911 meist zusammen mit J. E. Littlewood, der für das Buch das Vorwort schrieb, — an dem Ausbau der Theorie der divergenten Reihen ganz entscheidend mitgewirkt. So versteht es sich wohl von selbst, daß die schönen und tieflegenden Ergebnisse des Verf. — namentlich die vom Verf. als „Tauberian theorems“ bezeichneten Umkehrsätze — in den Brennpunkt der Betrachtungen gerückt sind. Freilich werden hier auch die neueren Methoden von Karamata und Wiener ausführlich behandelt. Es entspricht immer wieder der meisterhaften Darstellungskunst des Verf., einen Gegenstand von mehreren Seiten aus zu beleuchten, ein Problem durch Wechsel der Beweismethoden ganz plastisch herauszuarbeiten. Dies geschieht z. B. auch bei der Behandlung des Mercerschen Satzes und des Knopp-Schneeschens Äquivalenzsatzes. Dem gleichen Zweck dienen ebenfalls die in überraschender Zahl eingestreuten konkreten Beispiele. Die Beziehungen der Sätze untereinander werden sehr klar auseinandergesetzt. Der Text gibt nicht immer die schärfste oder allgemeinste Fassung eines Satzes. Auf sie wird dann aber jeweils in den Ergänzungen am Ende des betreffenden Kapitels hingewiesen. Dort findet man auch die einschlägige Literatur angeführt. Da neben der wohl durchdachten Gliederung des ungeheuren Stoffes das Buch sich keineswegs Vollständigkeit zum Ziel setzt, vermeidet es die Gefahr, durch eine Überfülle von Einzelheiten zu verwirren. Doch wird man wohl alles das, was heute zum klassischen Bestand der Theorie der divergenten Reihen gehört, die gebräuchlichsten Summierungsverfahren und die typischen Fragestellungen, in dem Werke selbst finden. — Da den Verf. noch während der Drucklegung eben desjenigen Werkes, das ihm unter all seinen Büchern das liebste war, der Tod überraschte, wurde es von seinem langjährigen Mitarbeiter Bosanquet — dem zum Dank für seine Mitarbeit dies Buch gewidmet ist, — ganz im Sinne des Verf. vollendet. — Die nun folgende knappe Inhaltswiedergabe vermag allerdings nur eine dürftige Vorstellung von der Reichhaltigkeit des Inhalts zu bieten. Die beiden ersten Kapitel geben in sehr lebendiger Form eine historische Einführung in die Problemstellungen der divergenten Reihen und Integrale, der verallgemeinerten Grenzwerte von Folgen und Funktionen, und überraschen dabei mit einer Fülle typischer Beispiele und historischer Bemerkungen. Das dritte Kapitel entwickelt allgemeine Sätze über lineare Transformationen von Folgen und Funktionen, den Kernsatz von Knopp und spezielle Sätze über bewichtete Mittelbildungen. Das vierte Kapitel erklärt spezielle Summationsmethoden (Verfahren von Nörlund, Euler, Abel, Borel nebst Verallgemeinerungen, die Methode der Momentenkonstanten, Riesz' typische Mittel, ferner Methoden, die sich aus der Theorie der Fourierreihen ergeben, wie die Verfahren von Féjér, Abel, de la Vallée Poussin, Riemann) und schließt mit einem von Hardy und Chapman bereits 1911 mitgeteilten allgemeinen Prinzip, dem sich viele der besprochenen Methoden unterordnen, ab. Das fünfte Kapitel bringt mehr systematische Untersuchungen über arithmetische Mittel, zunächst die einfachsten Eigenschaften dieser Mittel (Höldersche, Cesàrosche und entsprechende Integralmittelbildungen) und die direkten Sätze, die Einführung nicht ganzzahliger Ordnung, Faltungssätze, aber auch schon den Äquivalenzsatz für (C, k) und (H, k) , den Satz von Mercer, den Vergleich der (C, k) -Mittel mit den Abelschen und den arithmetischen Mitteln von Riesz. Den Abschluß bildet ein kurzer Abschnitt über gleichverteilte Folgen. — Das sechste Kapitel setzt die Betrachtung der arithmetischen Mittel fort und führt, indem es vor allem zu den „Tauberians theorems“ für das (C, k) -Verfahren überleitet, tiefer in den Fragenkreis ein; weiter findet man hier die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die (C, k) -Summierbarkeit erörtert, langsam oszillierende und langsam abfallende Funktionen, Konvexitätssätze und als Verallgemeinerungen der Kriterien von Abel und Dirichlet eine Reihe von Sätzen über Konvergenzfaktoren (Hardy, Bohr, Bosanquet u. a.), endlich analoge Taubersätze für Integrale, wobei die Unvollständigkeit der Analogie zwischen Reihen und Integralen herausgearbeitet wird. Den Schluß des Kapitels bilden ins einzelne gehende Ausführungen über die (C, k) -Summierbarkeit spezieller Reihen (Binomische Reihe, $\sum n^x e^{ni\theta}$). — Kapitel sieben ist den Tauberschen Sätzen für Potenzreihen gewidmet. Den klassischen Taubersätzen mit der o -Bedingung, die in der Stieltjesintegralform bewiesen werden,

schließt sich als Anwendung ein entsprechender Satz für allgemeine Dirichletsche Reihen an, und nun folgen die tiefer gelegenen Taubersätze mit der O -Bedingung. Zuerst wird die Methode von Karamata auf Stieltjesintegrale angewandt, sodann aber werden, wegen ihres selbständigen Interesses, auch die Ideen der Methode von Hardy-Littlewood auseinandergesetzt. Zum Schluß wird das „High indices theorem“ nach einer (stark verkürzten) Beweisaneinanderordnung von Ingham hergeleitet. — Im achten Kapitel werden die Methoden von Euler und Borel (auch ihre analogen Integralmittelbildungen) und ihre formalen Beziehungen zueinander näher untersucht. Bei dem B -Verfahren wird normale, absolute und reguläre Summierbarkeit unterschieden. „Abelsche Sätze“, Analytische Fortsetzung und die Summierbarkeit gewisser asymptotischer Reihen bilden den weiteren Gegenstand dieses Kapitels. — Das nächste, neunte Kapitel, gipfelt in der Darstellung der Umkehrsätze für das E - und B -Verfahren, nachdem eingangs in Hilfssätzen über die Exponential- und Binomische Reihe die nötigen Hilfsmittel bereitgestellt sind. Als Vorbereitung für den O -Umkehrsatz werden zwei besondere von Hardy-Littlewood herrührende Summationsmethoden eingeführt. Der Beweis des sehr tief liegenden Hauptsatzes erfolgt dann in Anlehnung an die Arbeit von Hardy-Littlewood aus dem Jahre 1943 unter Heranziehung des Vitalischen Satzes und beansprucht nur ganze $1\frac{1}{2}$ Druckseiten! Zum Abschluß wird noch die Valironische Methode, als umfassende Verallgemeinerung der Borelschen, berücksichtigt. An passender Stelle findet sich übrigens der das B -Verfahren benutzende Zygmundsche Beweis des Ostrowskischen Überkonvergenzsatzes eingestreut. — Das zehnte, mit „Multiplikation von Reihen“ überschriebene Kapitel bringt die Verallgemeinerung der drei klassischen Sätze von Cauchy, Mertens und Abel für (C, k) -, E - und B -summierbare Reihen (bzw. Integrale) und weitere ähnliche Sätze über das Cauchysche Produkt zweier Reihen, die Begriffe der Äquikonvergenz und Äquisummierbarkeit (Rajchmann-Zygmund), die in der Theorie der trigonometrischen Reihen eine wichtige Rolle spielen. Ein Satz von Stieltjes liefert ein Beispiel für das Dirichletsche Produkt zweier Reihen im Fall der Verallgemeinerung des Satzes von Mertens. Schließlich wird noch die Multiplikation zweiseitig unendlicher Reihen (restringierte Konvergenz, Laurent- und Fourier-Produkt unter Berücksichtigung der Arbeiten von Chapman, Rajchmann, Zygmund, Edmonds) in ähnlicher Weise untersucht. — Auf der Grundlage der neueren Untersuchungen von Rogosinski und Fuchs erfahren im elften Kapitel die Hausdorffschen Mittel sowie ihre analogen Integralmittel eine eingehende selbständige Würdigung, die bereits früher behandelte Themen weiterzuführen und zu vertiefen gestattet. Dies gilt beispielsweise für die Vergleichs- und Äquivalenzsätze (auch für nicht ganzzahlige Ordnung), die i. a. das Studium einer Mellin-Transformation erfordern, jedoch unter der Voraussetzung, daß die Momentkonstanten für keinen Index verschwinden, eine erheblich vereinfachte Behandlung zulassen. Der Beweis einer viele spezielle Ungleichungen enthaltenden Ungleichung für Hausdorffsche Mittel schlägt die Brücke zu des Verf. (gemeinsam mit Littlewood und Pólya verfaßten) „Inequalities“. Im letzten Teil gelangt Verf. durch Vertauschung von Zeilen und Spalten in der den Hausdorffschen Mitteln zugrunde liegenden Matrix zur Definition der „quasi-Hausdorff-Transformation“, die interessante Beziehungen zu früher betrachteten Summationsmethoden aufweist. — Im zwölften, dem letzten der den Summationsmethoden gewidmeten Kapitel, greift der Verf. mit „Wiener's Tauberian theorems“ noch einmal sein Lieblingsthema von den „Tauberian theorems“ auf. Jetzt werden die Umkehrsätze, die bisher auf ganz verschiedenen Wegen bewiesen wurden, einer einheitlichen weittragenden, aus der Theorie der Fouriertransformationen stammenden Methode unterworfen, die zugleich neues Licht auf das ganze Umkehrproblem zu werfen imstande ist. Gewissermaßen als Maß für die Kraft der Wiener'schen Methode wird nun der Inghamsche Beweis des Primzahlsatzes vorgetragen. Auch auf die Tauberschen Sätze des B -Verfahrens wird noch einmal eingegangen. Nach Aufstellung verschiedener möglicher Beweisaneinanderordnungen wird für den O -Umkehrsatz in der R. Schmidtschen Form durch Kombination eines Satzes von Vijayaraghavan mit einem Satz vom Wiener'schen Typ ein Beweis durchgeführt. Den Abschluß bildet der Beweis eines Tauberschen Satzes für das in der Theorie allgemeiner trigonometrischer Reihen wichtige Riemannsche Verfahren $(R, 2)$. — Das letzte, dreizehnte Kapitel, das als einziges nicht aus Vorlesungen hervorgegangen ist, behandelt in weniger systematischer Art als in den Lehrbüchern über Differenzenrechnung die Euler-Maclaurinsche Summenformel und steht damit nur in loserem Zusammenhang mit den Gegenständen der früheren Kapitel. Nur in dem letzten Teil über die Summierbarkeit der Euler-Maclaurinschen Reihe wird an eine frühere Verallgemeinerung des Borelschen Verfahrens angeknüpft. — Die fünf beigefügten Anhänge enthalten: I. Auswertung gewisser bestimmter Integrale mittels divergenter Reihen, II. Die Fourierschen Kerne gewisser Summationsmethoden, III. Über Riemannsche und Abelsche Summierbarkeit, IV. Über Lambert- und Ingham-Summierbarkeit, V. Zwei Sätze von M. L. Cartwright über die (A, p) -Summierbarkeit.

V. Garten (Tübingen).

Fort, Tomlinson: Quasi-monotone series. Amer. J. Math. 71, 227—230 (1949).

Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit komplexen Koeffizienten $a_n = x_n + i y_n$,

$x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ wird „quasimonoton im Mittel“ genannt, wenn, $x_n + y_n = t_n$ gesetzt, die Bedingungen gelten

$$t_{n-2} + t_{n-1} \geq 2t_n(1 - 1/b_n), \quad 2(1 + 1/B_{n-2})t_{n-2} \geq t_{n-1} + t_n,$$

wobei $1 < b_n \leq b_{n+1}$ und $0 < B_n \leq B_{n+1}$ ist. Für diese Reihen wird ein Satz über die Schnelligkeit des Verschwindens der a_n abgeleitet; ferner werden zwei notwendige und hinreichende Konvergenzkriterien angegeben, von denen das eine dem Cauchyschen Integralkriterium analog ist. *Heinhold* (München).

Lorentz, G. G.: Tauberian theorems and Tauberian conditions. Trans. Amer. math. Soc. 63, 226—234 (1948).

Für ein permanentes (reguläres) Limitierungsverfahren $A = (a_{mn})$ kann man aus $t_m = a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \dots \rightarrow t$ auf $s_n = u_1 + \dots + u_n \rightarrow t$ im allgemeinen nur unter Zusatzbedingungen („Tauberian conditions“) schließen. Es werden hier Lückenbedingungen: $u_n = 0$ für $n_k \leq n < n_{k+1}$ mit geeigneten $n_1 < n_2 < \dots$, und Ordnungsbedingungen: $u_n = o(c_n)$ oder $u_n = O(c_n)$ mit geeigneten c_n aus $0 \leq c_n < \infty$ betrachtet, und es wird gezeigt: „Wenn für ein Verfahren A ein Umkehrsatz („Tauberian theorem“) unter einer Lückenbedingung gilt, und wenn $c_{n_k} + \dots + c_{n_{k+1}-1} = O(1)$ ist, dann gilt der Umkehrsatz auch unter der Ordnungsbedingung“. Das gleiche trifft zu, wenn der Umkehrsatz unter der Lückenbedingung nur für Folgen s_n mit $s_n = o(k(n))$ gilt, wo $k = k(n)$ erklärt wird durch $c_{n_k} \leq n < c_{n_{k+1}}$. Ebenso kann man schließen, wenn man in dem Umkehrsatz die vorausgesetzte und behauptete Konvergenz durch Beschränktheit ersetzt. — Hinsichtlich der Verfahren von Cesàro $C_\alpha (\alpha > 0)$ und Abel P kommt Verf. zu dem konkreten Ergebnis: „Dafür, daß mit der Folge $0 \leq c_n < \infty$ die Bedingung $u_n = O(c_n)$ eine „Tauberian condition“ für die Verfahren von Cesàro oder für das Verfahren von Abel ist, ist notwendig und hinreichend: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge positiver Zahlen n_1, n_2, \dots , für die $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$ und $\sum_{n_k < n < n_{k+1}} c_n < \varepsilon$ erfüllt ist.“

R. Schmidt (München).

Delange, Hubert: The converse of Abel's theorem on power series. Ann. Math., Princeton, II. s. 50, 94—109 (1949).

Ein großer Teil der bekannten Umkehrsätze (Tauberian theorems) für Potenzreihen und Dirichletsche Reihen läßt sich aus dem folgenden Satze über Laplacesche Integrale folgern (der seinerseits in weitergehenden Ergebnissen von J. Karamata enthalten ist): Wenn $s(t)$ in $0 \leq t < \infty$ definiert und in jedem endlichen Teilintervall von beschränkter Schwankung ist, $s(0) = 0$, wenn ferner entweder $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{t \leq \tau \leq \lambda t} |s(\tau) - s(t)| \leq g(\lambda)$ oder $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{t \leq \tau \leq \lambda t} |s(\tau) - s(t)| \geq -g(\lambda)$ und in jedem Falle

$g(\lambda) \rightarrow 0$ mit $\lambda \rightarrow 0$, dann folgt aus $\lim_{z > 0, z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-zt} ds(t) = S$ stets $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = S$. —

Zunächst wird dieser Satz auf einfache Weise neu bewiesen, sodann verschärft: Die Voraussetzungen über $s(t)$ werden abgeschwächt, und die Existenz von S wird nur gefordert für gewisse $z = z_\nu \rightarrow 0$ in einem Winkelraum $< \pi/2$. Als Korollar folgt eine Verallgemeinerung des ursprünglichen Umkehrsatzes über Dirichletsche Reihen von Littlewood und der Erweiterungen dieses Satzes, die von Anandara-Rau [J. London math. Soc. 3, 200—205 (1928)] und Shtshegloff [Mat. Sbornik, II. s. 14, 109—132 (1944)] angegeben wurden. — Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden früher vom Verf. ohne Beweise im wesentlichen mitgeteilt; vgl. dies. Zbl. 29, 25.

R. Schmidt (München).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Merli, Luigi: Su una formula di quadratura. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 132—134 (1947).

Soient $x_k^{(n)} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, 2, \dots, n$ les racines du polynôme de Tchebycheff $T_n(x) = \cos [n \arccos x]$ et

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{T_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

les polynômes fondamentaux d'interpolation correspondants aux points $x_k^{(n)}$. L'aut. démontre la formule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) \int_{-1}^{+1} [l_k^{(n)}(x)]^2 dx = \int_{-1}^{+1} f(x) dx$$

valable pour toute fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $[-1, 1]$.

T. Popoviciu (Cluj).

Gončarov, V. L.: Über ein Interpolationsschema von allgemeiner Form. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 59, 1529—1532 (1948) [Russisch].

On donne la forme du reste dans la formule générale d'interpolation $f(x) = P_n(f, x) + R_n(f, x)$, où le polynôme $P_n = P_n(f, x)$, de degré n , est déterminé par les égalités (*) $U_m[f] = U_m[P]$, $m = 0, 1, \dots, n$. $U_m[F]$, $m = 0, 1, \dots, n$ sont des fonctionnelles linéaires, définies pour des fonctions $F(x)$ de la variable complexe x . Les $U_m[F]$ s'expriment, par ex., à l'aide d'intégrales de la forme

$$U_m[F] = \int F(x) d\psi_m(x), \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

où bien par d'autres expressions analogues. On suppose que le déterminant des moments $\|U_i[x^k]\|$, $i, k = 0, 1, \dots, n$ est différent de zéro pour que le polynôme P_n soit bien déterminé. L'aut. exprime $P_n(f, x)$ et $R_n(f, x)$ à l'aide d'intégrales prises le long d'un contour fermé convenable dans le plan complexe. $P_n(f, x)$, $R_n(f, x)$ peuvent aussi s'exprimer à l'aide des opérations $U_m[F]$ superposées, en utilisant la formule d'interpolation de Lagrange, qui est d'ailleurs la formule correspondant au cas particulier $U_m[F] = F(a_m)$, $m = 0, 1, \dots, n$, du problème (*).

T. Popoviciu (Cluj).

Chen, Kien-Kwong: An extension of Parseval's formula in the theory of orthogonal functions. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 511—514 (1948).

Sia $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ un sistema di funzioni ortogonali e normali nell'intervallo $(0, 1)$, per cui: $|\varphi_m(x)| < M$ ($0 \leq x \leq 1$, $m = 1, 2, \dots$) e sia inoltre: $1 < a < b$, $b = a(b-1)$ e $n(x) \leq n$. In tali ipotesi vale la seguente disuguaglianza:

$$\left[\int_0^1 \left| \sum_{m=1}^{n(x)} c_m \varphi_m(x) \right|^b dx \right]^{1/b} \leq c (\log n)^{2(a-1/a)} M^{(2-a/a)} \left(\sum_{m=1}^n |c_m|^a \right)^{1/a}$$

e più generalmente, l'altra:

$$\left[\sum_{m=1}^n \left| \int_D f(x) \varphi_m(x) dx \right|^b \right]^{1/b} \leq C (\log n)^{2(a-1/a)} M^{(2-a/a)} \left(\int_D |f(x)|^a dx \right)^{1/a}$$

ove $f \in L^a(0, 1)$ e $(0, 1) = D \supseteq D_1 \supseteq \dots \supseteq D_n$.

C. Miranda (Napoli).

Boas jr., R. P.: Density theorem for power series and complete sets. Trans. Amer. math. Soc. 61, 54—68 (1947).

Ist $\lambda_n > 0$ eine Zahlenfolge und $n(t) = n_\lambda(t)$ die Anzahl der λ_n , die $\leq t$ sind, und gilt $n(t) - t/2 \geq -t\delta(t)$, wo $\int_1^\infty t^{-1}\delta(t)dt$ konvergiert, so ist $\{t^{\lambda_n}e^{-ct}\}$ ($c > 0$) ein vollständiges System bezüglich L_p ($1 \leq p \leq \infty$). — Ist $a_n > 0$ eine Zahlenfolge und $n_a(t) > t - t\delta(t)$, wo $\int_1^\infty t^{-1}\delta(t)dt$ konvergiert, so ist von zwei komplementären Folgen $\{\lambda_n\}$ und $\{\mu_n\}$, die zusammen die Folge $\{a_n\}$ ergeben,

mindestens eins der Systeme $\{t^{\lambda_n} e^{-ct}\}$ und $\{t^{\mu_n} e^{-ct}\}$ vollständig. Dieses Ergebnis wird entsprechend auf k komplementäre Folgen übertragen. — Ist $\lambda_n > 0$ ganz und $n(r) \leq r(\pi^{-1}\alpha - \varepsilon(r))$, wo $\int_1^\infty r^{-1}\varepsilon(r) dr$ divergiert, so hat $f(z) = \sum_{n=1}^\infty c_n z^{\lambda_n}$ in jedem Winkelraum mit dem Scheitel im Anfangspunkt und der Öffnung 2α entweder einen singulären Punkt oder ist unbeschränkt (falls nicht konstant). Für $\alpha = \pi/2$ gilt dies in jeder Halbebene, die den Punkt $z = 0$ im Innern enthält, wenn nur $n(r) \leq r(\frac{1}{2} + \delta(r))$, wobei $\int_1^\infty r^{-1}\delta(r) dr$ konvergiert. — Es folgen Zerlegungssätze für Potenzreihen analog zu denjenigen für vollständige Systeme.

Schmeidler (Berlin).

Szász, Otto: On Möbius' inversion formula and closed sets of functions. Trans. Amer. math. Soc. **62**, 213—239 (1947).

E sei eine Menge von reellen oder komplexen Zahlen. Die Menge der auf E definierten und beschränkten Funktionen $x(t)$ heiße S . a_n sei eine Zahlenfolge mit $a_1 = 1$, $\sum |a_n| < \infty$ und λ_n eine Folge von Zahlen, die voneinander und von 0 verschieden sind ($\lambda_1 = 1$). Sie seien so gewählt, daß mit $t \in E$ auch $\lambda_n t \in E$ gilt. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen die Transformation

$$(1) \quad y(t) = \sum_1^\infty a_n x(\lambda_n t) = x(t) + \sum_2^\infty a_n x(\lambda_n t) = x(t) + A(x)$$

eine eindeutige Umkehrung zuläßt. Satz 1. Für $\sum_2^\infty |a_n| < 1$ hat (1) eine eindeutige

Umkehrung $x(t) = y(t) + B(y)$, wobei $B(y) = \sum_2^\infty b_n y_n(t)$, $\sum |b_n| < \infty$. Satz 2. Es

sei $\sum_{n,v=1}^\infty |a_n u_v y(\lambda_n \lambda_v t)| < \infty$, wo u_v eine Lösung des Systems (2) $u_1 = 1$, $\sum u_v a_n = 0$, summiert über alle $\lambda_v \lambda_n = \lambda_m$ ($m \geq 2$) darstellt, so daß formal $\left(\sum_1^\infty a_n \lambda_n^{-s}\right) \left(\sum_1^\infty u_n \lambda_n^{-s}\right) = 1$. Dann ist (3) $x(t) = \sum_1^\infty u_n y(\lambda_n t)$ eine Lösung von (1),

und zwar die einzige, die die Bedingung $\sum_{n,v=1}^\infty |a_n u_v x(\lambda_n \lambda_v t)| < \infty$ erfüllt. — Für $\lambda_n = n$

reduzieren sich (2) und (3) auf die Umkehrformeln von Möbius. — Anwendung auf die Theorie der Approximation und Vollständigkeit: Die Gesamtheit aller Funktionen, die gleichmäßig durch lineare Aggregate von Funktionen einer gegebenen Folge approximiert werden können, heiße die Spannweite dieser Folge. Satz 4. Wenn die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind und die dortige Reihenkonvergenz gleichmäßig ist, so haben die Folgen $x(\lambda_n t)$, $y(\lambda_n t)$ dieselbe Spannweite. — Hierfür werden mehrere Beispiele vorgeführt. — Anwendung auf Vollständigkeit in L^r : Satz 7. Die Folge $x(\lambda_n t)$ sei vollständig in $L^r(a, b)$, und es sei $y(t) \in L^r(a, b)$. Die aus (1)

folgende Gleichung $y(\lambda_r t) - \sum_{n=1}^\infty a_n x(\lambda_n \lambda_v t)$ sei gliedweise integrierbar, und die

einzigste Lösung des Systems $\sum_1^\infty a_n \xi(\lambda_n u) = 0$, $u = \lambda_1, \lambda_2, \dots$, sei $\xi(\lambda_n) = 0$.

Dann ist die Folge $y(\lambda_n t)$ vollständig in $L^r(a, b)$, $1 \leq r \leq \infty$. — Ein weiteres Resultat (Satz 13) wird über Vollständigkeit im Raum C der im Intervall $(0, 1)$ stetigen Funktionen abgeleitet. Von beiden Sätzen werden mehrere Anwendungen gemacht. Als Beispiele seien erwähnt: Die Folge $nt - [nt] - \frac{1}{2}$ ist vollständig in $L^r(0, \frac{1}{2})$ für alle $r > 1$; die Folge $\sin n\pi t$ ist vollständig in $L^r(0, 1)$ für alle $r > 1$; wenn $h(t)$ im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ stetig differenzierbar und $\neq 0$ ist, so ist die Folge $1, h(t) \frac{\log(1-t^n)}{\log(1-t)}$ in C vollständig.

Doetsch.

Zygmund, A.: On a theorem of Hadamard. Ann. Soc. Polonaise Math. 21, 52—69 (1948).

Ausgangspunkt der Untersuchung ist eine Folgerung aus dem bekannten Hadamardschen Lückensatz für Potenzreihen: Es sei n_k eine Folge natürlicher Zahlen, die der Bedingung

$$(1) \quad n_{k+1}/n_k > q > 1$$

genügt (q konstant), und es konvergiere das der trigonometrischen Lückenreihe

$$(2) \quad a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i n_k x}$$

(a_0, a_k, b_k, x reell, $n_{-k} = -n_k$, c_k komplex, $c_{-k} = \bar{c}_k$) assoziierte harmonische Funktionselement

$$(3) \quad u(r, x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) r^{n_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i n_k x} r^{|n_k|}$$

mindestens für $|z| < 1$, wobei $z = r e^{ix}$ gesetzt ist; ist dann die Reihe (2) unter Berücksichtigung ihrer verschwindenden Summanden in einem Intervall $\alpha \leq x \leq \beta$ gleichmäßig Abel-summierbar zu einer analytischen Funktion von x , so gibt es eine positive Zahl ε , so daß $u(r, x)$ harmonisch ist für $|z| < 1 + \varepsilon$. Dies wird verallgemeinert. — Hauptergebnis ist der folgende Satz 1: (a) Die Reihe (2), für die (1) erfüllt sein soll, sei konvergent für alle x einer Menge E von positivem Maß, und die Summe $f(x)$ stimme in E überein mit einer Funktion $\varphi(x)$, die in einem E enthaltenden Intervall (α, β) analytisch ist; dann gibt es ein positives ε , so daß die Funktion (3) harmonisch ist für $|z| < 1 + \varepsilon$. (b) Konvergiert die Reihe (2) zum Wert 0 in einer Menge E von positivem Maß, so verschwindet sie identisch. Der Beweis des Teiles (a) ergibt sich unter Verwendung mehrerer Hilfssätze. Einer davon lautet: Ist die im Intervall $(0, 2\pi)$ gelegene Menge E meßbar, so gibt es eine Nullfolge h_n , so daß für fast alle x aus E die Punkte $x + h_m$ zu E gehören für $m > m_0(x)$. Die anderen Hilfssätze werden dem Lehrbuch des Verf. [Trigonometrical series, Warszawa-Lwów 1935; dies. Zbl. 11, 17] entnommen. Der schon bisher bekannte Teil (b) des Satzes [A. Zygmund, Trans. Amer. math. Soc. 34, 435—446 (1932); dies. Zbl. 5, 63] wird nochmals mitbewiesen. — Die weitere Untersuchung hat eine wesentliche Verallgemeinerung des Satzes 1 zum Ziel. Eine trigonometrische Reihe heiße vom Typus m ($= 2, 3, \dots$), wenn sie die Summe von m Reihen der Form (2) ist, wobei für jede der dabei auftretenden m Indexfolgen $n_k^{(1)}, \dots, n_k^{(m)}$ die Lückenbedingung (1) erfüllt ist. Satz 1 gilt nun auch, wenn an die Stelle der der Bedingung (1) genügenden Reihe (2) eine trigonometrische Reihe vom Typus m gesetzt wird. Zum Beweis müssen die oben benützten Hilfssätze entsprechend verallgemeinert werden. Sie sind für sich von Interesse. Vor allem handelt es sich um den (einen umfangreichen Beweis erfordernden) Satz 6:

Die Reihe (4) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n x}$ sei vom Typus m und konvergiere in einer Menge E positiven Maßes zur Summe $f(x)$; dann gibt es eine natürliche Zahl $p_0 = p_0(q, E, m)$

und eine Konstante $A = A(q, E, m)$, so daß $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 < A \int_E f^2 dx$, sofern C_n

verschwindet für $|n| \leq p_0$. Einfacher ergeben sich die Sätze 4 und 5. Satz 5:

Die Reihe (4) sei vom Typus m und Fouriersche Reihe der Klasse L^2 ; dann konvergiert sie fast überall. Satz 4: Die Reihe (4) sei vom Typus m und konvergiere

in einer Menge E positiven Maßes; dann ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$ konvergent, und dies gilt

auch, wenn statt der Konvergenz nur Summierbarkeit durch irgendein permanentes Toeplitzsches Summierungsverfahren oder sogar nur Beschränktheit der zu diesem gehörigen Mittel für jedes x aus E verlangt wird. — Die Ausdehnung der Ergebnisse auf den Fall nicht notwendig ganzzahliger Indizes n_k wird angedeutet.

Meyer-König (Stuttgart).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Koschmieder, Lothar: Die Krümmung des Schaubildes der Jacobischen Thetafunktion. *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV. s. 8, 1—6 (1948).

Mit natürlichem $n = 1, 2, \dots$ hat für $0 < x \leq 2\pi$ ein reelles \cos -Polynom $\sum_{v=0}^n b_v \cos vx$ $2w$ Wendepunkte mit $1 \leq w \leq n$. Die Kleinstzahl $2w = 2$ wird im Grenzfalle $n \rightarrow \infty$ angenommen für $q^{v^2} = b_v < 2b_0 = 1$. Der Beweis, der Differentialeigenschaften der elliptischen Thetafunktion benutzt, wurde 1912 von M. Krause angesetzt und wird hier vervollständigt. — Durch postalische Schwierigkeiten blieben Druckfehler zu verbessern wie S. 4, drittletzte Zeile: $1 - E/K > 0$; S. 5, Zeile 19: $\Theta''_0(v)$; $\Theta''_0(w) = 0$. Maier (Jena).

Wintner, Aurel: On a decomposition into singularities of theta-functions of fractional index. *Amer. J. Math.* 71, 105—108 (1949).

Bei $0 < \lambda$ und $q < 1$ stellt $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2\pi n x$ für alle reellen x eine gerade Funktion mit der Periode 1 und Ableitungen beliebig hoher Ordnung dar. Diese Funktion hat trotzdem in $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ algebraische bzw. logarithmische Verzweigungsstellen, je nachdem λ rational bzw. irrational ist. Die ursprüngliche Reihe ist nämlich für $0 < x < 1$ die Fouriersche Reihe der Funktion $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p x + p n)$, wo $p = 2\pi/(-\log q)^{1/\lambda}$ ist und $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^\lambda} \cos xt dt$ für positive x die Entwicklung $\sum_{m=0}^{\infty} c_m/x^{m+1-\lambda}$ mit $(-1)^m m! c_m = \lambda \Gamma((m+x)\lambda) \sin(\frac{\pi}{2}(m+1)\lambda)$ besitzt. So ergibt sich für den positiven Zweig der durch die ursprüngliche Reihe definierten Funktion für $0 < x < 1$ die den Singularitäten entsprechende Entwicklung $(2\pi)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m p^{-m-\lambda} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{-m-\lambda-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-x)^{-m-\lambda-1} \right\}$.

Szentmártony (Budapest).

Huff, William N.: The type of the polynomials generated by $f(x)t \varphi(t)$. *Duke math. J.* 14, 1091—1104 (1947).

Es handelt sich um Folgen von Polynomen $y_n(x)$ genau n -ten Grades ($n = 0, 1, \dots$), die sich durch formale Potenzreihenentwicklung

$$f(x)t \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) t^n, \text{ worin } f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n u^n}{n!}, \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n t^n}{n!},$$

$b_0 \neq 0$, alle $a_n \neq 0$, ergeben. Sie werden auf ihre Zugehörigkeit zu gewissen, von Sheffer [*Duke Math. J.* 5, 590—622 (1939); dies. Zbl. 22, 15] aufgestellten Typen untersucht. Man geht hierbei davon aus, daß jede Folge von Polynomen $P_n(x)$ genau n -ten Grades die Darstellungen eindeutig festlegt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{A)} \quad P_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^n L_j(x) P_n^{(j)}(x) \\ \text{B)} \quad P'_n(x) = \sum_{j=1}^n T_{j-1}(x) P_{n-j}(x) \\ \text{C)} \quad n P_n(x) = \sum_{j=1}^n U_j(x) P_{n-j}(x) \end{array} \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Hierbei seien die Koeffizienten Polynome, und zwar L_j vom Grade $\leq j-1$, T_j und U_j vom Grade $\leq j$. Die Folge $P_n(x)$ heißt insbesondere vom A- bzw. B- bzw. C-Typ k (≥ 0), wenn der maximale auftretende Grad bei den L_j bzw. T_j bzw. U_{j-1} k ist. Zunächst wird gezeigt, daß eine Folge $P_n(x)$ sich dann und nur dann als Folge $y_n(x)$ erzeugen läßt, wenn in den Darstellungen A) oder B) die Koeffizienten sich auf ihre höchsten Glieder (oder $\dots 0$) reduzieren. Dann folgen Zugehörigkeits-

bedingungen für die Typen k . Im Falle B) k [der übrigens nach Sheffer a. a. O. mit C) k übereinstimmt] ist z. B. notwendig und hinreichend, daß $f(u) = e^{H(u)}$, wo $H(u)$ ein Polynom vom Grade $k + 1$. Für gewisse Polynomfolgen vom A-Typ k wird ferner eine unendliche Differentialgleichung mit dem Parameter n hergeleitet, die sich im Falle $\varphi(t) = e^{h(t)}$ [$h(t)$ Polynom] auf eine solche endlicher Ordnung reduziert. Für Folgen vom Typ A) 1 und A) 2 werden auch Rekursionsformeln gewonnen, die sich aber nur ausnahmsweise zu Differenzengleichungen endlicher Ordnung vereinfachen. Die Frage nach orthogonalen Systemen y_n liefert Hermitesche [A) 0] und Laguerresche [A) 1] Polynome. *Hermann Schmidt* (Braunschweig).

Koschmieder, L.: Integrale mit hypergeometrischen Integranden. Acta math., Uppsala 79, 241—254 (1947).

Verf. bespricht zunächst, mit eingehenden geschichtlichen Angaben, Integrale vom Typ (1) $\int_0^1 f(s) F(xs) ds$, worin $f(s)$ eine multiplikative Funktion der Gestalt $s^\alpha (1-s)^\beta$, $F(u)$ eine Gaußsche, Kummersche oder höhere hypergeometrische Funktion bedeutet. Das Integral wird bei geeigneten Zusammenhängen zwischen α, β und den in F auftretenden Parametern (und wenn noch gewisse, die Konvergenz gewährleistende Ungleichungen für die Parameter erfüllt sind) selbst eine hypergeometrische Funktion (vom Argument x). Formeln dieser Art finden sich z. B. bei Erdélyi [Quart. J. Math. (Oxford. Ser.) 8, 200—213 (1937); dies. Zbl. 17, 163]; Verf. weist darauf hin, daß ein Teil derselben schon in älteren Ergebnissen von Schafheitlin [S.-B. Berliner math. Ges. 11, 20—25 (1912)] und Cailler [Enseign. math. 21, 224—225, 255—259 (1920)] enthalten ist. Bei dem zweitgenannten finden sich auch Integralformeln mit Produkten (2) $F(sx) F^*((1-s)u)$ an Stelle von $F(xs)$ in (1), also Identitäten in den zwei unabhängigen Veränderlichen x, u . Ein bei Cailler nur angedeuteter Beweis wird ausgeführt. Weiterhin werden nun Formeln der Bauart (1) für Appellsche hypergeometrische Funktionen von zwei Veränderlichen aufgestellt, d. h. also Integrale der Form (3) $\int_0^1 \int_0^1 f_1(s) f_2(t) F(sx, ty) ds dt$ (f_j wie oben f) durch Appellsche Funktionen ausgewertet. Beweis einerseits durch gliedweise Integration, andererseits durch „verallgemeinerte Differentiation“. Bei der Art, wie diese durch Integraltransformationen erklärt wird, scheint übrigens dem Ref. kein grundsätzlicher, sondern nur ein formaler Unterschied zwischen beiden Verfahren zu bestehen. Ein unmittelbares Gegenstück zu (2) wird nicht gegeben, dafür ein Integral der Gestalt $\int_0^1 \int_0^1 f_1(s) f_2(t) F(sx, ty) F_1(1-s) F_2(1-t) ds dt$, worin F eine Appellsche Reihe ist, F_1 und F_2 aber Gaußsche Reihen bedeuten, durch eine Appellsche Funktion von x, y ausgedrückt. Hierbei spielt die „verallgemeinerte Teilintegration“ (für Integranden der Form $U D^\omega V, \omega$ allgemeiner Differentiationsindex!) eine Rolle. *Hermann Schmidt* (Braunschweig).

Funktionentheorie:

• **Knopp, K.:** Problem book in the theory of functions. I. Trans. by L. Bers. New York: Dover 1948. VIII, 126 p. \$ 1,85.

Erdős, P. and K. Fried: On the connection between gaps in power series and the roots of their partial sums. Trans. Amer. math. Soc. 62, 53—61 (1947).

Das Funktionselement (1) $f(x) = 1 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ besitze den Konvergenzradius 1. Gibt es ein positives $\varrho < 1$ und zwei Indexfolgen m_k, n_k mit $m_k < n_k, \lim_{k \rightarrow \infty} n_k/m_k > 1$ und $|a_n| < \varrho^n$ für $m_k \leq n \leq n_k$, so werde gesagt,

(1) besitze Ostrowskische ϱ -Lücken, kurz Ostrowskische Lücken. Gibt es ein positives $\varrho < 1$, so daß zu jedem $\varrho' > \varrho$ zwei (von ϱ' abhängige) Indexfolgen m_k, n_k

mit $m_k < n_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k/m_k = \infty$ und $|a_n| < \varrho'^n$ für $m_k \leq n \leq n_k$ vorhanden sind,

so werde gesagt, (1) besitze unendliche Ostrowskische ϱ -Lücken. Mit $A(n, r)$ werde die Anzahl der im Kreis vom Radius r um den Ursprung gelegenen Wurzeln der Gleichung (2) $1 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$ bezeichnet. — Es gilt [vgl. G. Bourion, Actual. sci. industr. Nr. 472, Paris 1937; dies. Zbl. 17, 313]: (I) Dann und nur dann besitzt (1) Ostrowskische Lücken, wenn es ein $r > 1$ gibt, so daß $\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} A(n, r) < 1$ ist. Verff. geben dafür einen neuen Beweis und leiten dazu

den folgenden Hilfssatz her: Ist $0 < \varrho < 1 < r < 1/\varrho$, dann gibt es eine positive Konstante $c = c(r, \varrho)$, so daß jede Gleichung (2) mit $|a_k| < \varrho^k$ für $m \leq k \leq n$ mindestens $c(n - m + 1)$ Wurzeln außerhalb des Kreises vom Radius r um den Ursprung besitzt. — Weiter wird beweisen: (II) Ist $0 < \varrho < 1$, so besitzt (1) dann und nur dann unendliche Ostrowskische ϱ -Lücken, wenn $\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} A(n, r) = 0$

ist für alle $r < \varrho^{-1}$. Der Beweis beruht auf dem folgenden Hilfssatz: Besitzt (1) Ostrowskische ϱ -Lücken und ist $\varepsilon > 0$, so gilt $\liminf_{k \rightarrow \infty} n_k^{-1} A(n_k, r) \leq \sigma + \varepsilon$ für jedes $r < \varrho^{-\lambda}$ mit $\lambda = \varepsilon(\sigma + \varepsilon)^{-1}$, $\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k/n_k$. — Zum Schluß wird noch be-

merkt, daß sich nach P. Turán der erste der beiden Hilfssätze aus einem Satz von van Vleck ableiten läßt.

Meyer-König (Stuttgart).

Shen, Yu-Cheng: Interpolation to some classes of analytic functions by functions with pre-assigned poles. Trans. Amer. math. Soc. 62, 338—356 (1947).

Eine in dem offenen Einheitskreis K analytische Funktion $f(z)$ heißt von der Klasse S_α , wenn es ein $\alpha > 1$ gibt derart, daß

$$\mathfrak{M}_\alpha(f; r) = \frac{\alpha - 1}{\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{\alpha-2} |f(re^{i\vartheta})|^{2r} r d\vartheta dr$$

für $0 < r < 1$ beschränkt ist. a_{nk} ($n = 1, 2, \dots$; $k = 1, \dots, n$) sei eine vorgegebene Punktfolge in K ohne Häufungspunkt in K . Zwei Folgen a_{nk} und b_{nk} heißen äquivalent, wenn sie durch eine Transformation $\xi = \lambda(z - c)/(1 - \bar{c}z)$ mit $|\lambda| = 1$, $|c| < 1$ ineinander übergehen. a_{nk} heißt von der Ordnung m_k , wenn genau m_k Punkte aus der Menge $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n, k-1}$ mit a_{nk} zusammenfallen. δ_k bezeichne die m_k -malige Differentiation nach dem Parameter a_{nk} mit nachfolgender Auswertung in dem vorgegebenen Punkt a_{nk} . $\bar{\delta}_k$ bezeichne die entsprechende Operation bezüglich \bar{a}_{nk} . Für $m_k = 0$ sei $\delta_k = \bar{\delta}_k = 1$. Mit den Funktionen $\varphi_{nk}(z) = 1/(1 - a_{nk}z)^\alpha$ werden zu einer Funktion $f(z)$ der Klasse S_α die

Interpolationsfunktionen $f_n(z) = \sum_{k=1}^n A_{nk} \bar{\delta}_k \varphi_{nk}(z)$ gebildet, die durch die Forderung

$\delta_k f_n(a_{nk}) = \delta_k f(a_{nk})$, $k = 1, \dots, n$, bestimmt werden. Die Frage, um die es sich handelt, lautet: Welche Bedingungen sind den a_{nk} aufzuerlegen, damit die Folge $f_n(z)$ in jeder abgeschlossenen Punktmenge in K gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert? — Den Fall $\alpha = 2$ hat der Verf. in Trans. Amer. math. Soc. 60, 12—21 (1946) behandelt. In der vorliegenden Arbeit beweist er: Satz A. Hinreichend ist die Bedingung, daß die Folge a_{nk} mit einer Folge b_{nk} äquivalent ist, für die

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-1} \prod_{k=1}^n |b_{nk}|^2 = 0$. Die Bedingung ist auch notwendig, wenn für jedes hinreichend große n die n Punkte b_{nk} auf einem Kreis $|z| = r_n$, $0 < r_n < 1$, äqui-

distant verteilt sind. — Satz B. Notwendig ist die Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n |a_{nk}| = 0$.

Sie ist für $1 < \alpha \leq 2$ auch hinreichend, wenn die Folge a_{nk} mit einer Folge b_{nk} äquivalent ist, bei der für jedes hinreichend große n die n Punkte b_{nk} auf einem Durchmesser des Einheitskreises liegen. (In den Produkten II in Satz A und B sind eventuelle Nullen als Faktoren wegzulassen.) Doetsch (Freiburg i. Br.).

Korevaar, J.: A simple proof of a theorem of Pólya. Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr. 26, 81—89 (1948/49).

Démonstration simplifiée d'un théorème de Pólya, suivant lequel: Une fonction entière de type exponentiel égal à zéro $[f(z)e^{-\varepsilon|z|}]$ reste borné, quel que soit $\varepsilon > 0$ qui est bornée sur l'ensemble des valeurs $z = \pm n$, n entier positif ou nul, se réduit à une constante. Deux théorèmes de Phragmén et Lindelöf sont établis, en s'appuyant sur le principe du maximum, et une conséquence immédiate est le théorème de S. Bernstein: Une fonction entière de type exponentiel égal à zéro, qui reste bornée le long d'une droite, se réduit à une constante. L'auteur arrive, par des transformations convenables, à en déduire le théorème de Pólya par voie élémentaire. *Călugăreanu (Cluj).*

Mandelbrojt, S. and G. R. MacLane: On functions holomorphic in a strip region, and an extension of Watson's problem. Trans. Amer. math. Soc. 61, 454—467 (1947).

Ferrand, Jacqueline: Note on a paper by Mandelbrojt and MacLane. Trans. Amer. math. Soc. 61, 468 (1947).

Ist $F(z)$ eine im Streifen $|y| < \pi/2$ reguläre, beschränkte, nicht identisch verschwindende Funktion, die noch am Rande stetig ist, so ist das Integral $\int_0^\infty \log |F(x \pm i\pi/2)| e^{-x} dx$ bekanntlich endlich [z. B. Ostrowski, Acta math., Uppsala 53, 195—196 (1929)]. Mandelbrojt [C. r. Acad. Sci., Paris 222, 361 (1946)] hat bewiesen, daß der Satz noch gilt, wenn der Streifen $|y| < \pi/2$ durch ein Gebiet $\Delta: x > 0, |y| < g(x)$, ersetzt wird, wo $0 < g(x) \uparrow \pi/2$ und $(1) \int_0^\infty (\pi/2 - g(x)) dx < \infty$. Verf. verallgemeinert jetzt dieses Resultat auf den Fall, wo das Integral (1) nicht mehr endlich ist und $g(x)$ nicht $< \pi/2$ zu sein braucht. Das Umgekehrte wird auch bewiesen. Folgendes Problem von Watson wird noch für Gebiete Δ obenerwähnter Art verallgemeinert: Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die positiven Zahlen M_n , damit jede in der Halbebene $\Re \zeta \geq 0$ reguläre Funktion $\Phi(\zeta)$, die den Ungleichungen $|\Phi(\zeta)| \leq M_n |\zeta|^{-n}$ ($n = 1, 2, \dots$) genügt, identisch verschwindet? — J. Ferrand verallgemeinert die Sätze auf Gebiete Δ , welche nicht symmetrisch sind. *V. Paatero (Helsinki).*

Gerst, Irving: Meromorphic functions with simultaneous multiplication and addition theorems. Trans. Amer. math. Soc. 61, 469—481 (1947).

L'auteur se propose de déterminer toutes les fonctions méromorphes de z qui possèdent simultanément un théorème d'addition et un théorème de multiplication, en ce sens que l'on doit avoir $f(mz) = R[f(z)]$, $f(z+h) = S[f(z)]$ pour certaines valeurs $m \neq 0, 1$ et $h \neq 0$, R et S étant des fractions rationnelles. Ceci généralise un travail de Ritt [Trans. Amer. math. Soc. 23, 16—25 (1922)] concernant les fonctions méromorphes périodiques qui admettent un théorème de multiplication, dont les méthodes et résultats sont utilisés, ainsi que le travail de H. Poincaré sur le même sujet. Une solution du problème, valable pour m et h quelconques, est la fonction homographique de z , seule solution rationnelle. Pour $f(z)$ transcendente, on distingue trois cas: 1. $|m| > 1$. Alors $f(z)$ est périodique, exprimable à l'aide de fonctions usuelles. Les valeurs convenables de h sont précisées dans chaque cas. 2. $|m| \leq 1$, m n'est pas racine de l'unité. La fonction homographique, seule solution. 3. m racine primitive n -me de l'unité. Des solutions non-périodiques apparaissent en plus, pour certaines valeurs de n . *Călugăreanu.*

Hermes, Hans: Analytische Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Bereichen. Math. Ann., Berlin 120, 539—562 (1949).

Verf. definiert Riemannsche Bereiche R , welche eine Verallgemeinerung der klassischen Riemannschen Flächen auf höhere Dimensionszahlen darstellen. Es

wird dabei nach Weyl'schem Vorbild mit Ortsuniformisierenden operiert. Diese Ortsuniformisierenden haben jedoch nicht nur offene Teilmengen eines R_n , sondern auch Teilmengen analytischer Mannigfaltigkeiten des R_n als Definitionsbereiche. — Nachdem in einem Riemannschen Bereich R die Begriffe der regulären Funktion und der analytischen Mannigfaltigkeit erklärt sind, werden folgende Sätze bewiesen: 1. Der Durchschnitt von beliebig vielen analytischen Mannigfaltigkeiten in R ist selbst eine analytische Mannigfaltigkeit in R . 2. Jede analytische Mannigfaltigkeit M in R ist selbst ein Riemannscher Bereich, wenn die Struktur von R in naheliegender Weise auf M relativiert wird. Eine analytische Mannigfaltigkeit in R heißt irreduzibel, wenn für beliebige analytische Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 in R gilt: Aus $M \subset M_1 \cup M_2$ folgt: $M \subset M_1$ oder $M \subset M_2$. — Es gilt folgender Zerlegungssatz: Jede analytische Mannigfaltigkeit in R ist darstellbar als Vereinigung von endlich oder abzählbar unendlich vielen irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeiten. Es gibt unverkürzbare Darstellungen $M = \bigcup M_j$, d. h. solche, bei denen aus $M_i \subset M_j$ folgt: $i = j$. Je zwei unverkürzbare Darstellungen stimmen (bis auf die Reihenfolge der Komponenten) überein. Huber (Zürich).

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Biernacki, M.: Sur les zéros des intégrales de l'équation $x^{(5)}(t) + A(t) \cdot x(t) = 0$. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 26—37 (1948).

In dieser Arbeit handelt es sich um die Wurzeln der Integrale der Differentialgleichung $x^{(n)}(t) + A(t)x(t) = 0$. Von diesen Wurzeln sind folgende Tatsachen bekannt: Wenn $0 \leq A(t) \leq M$ in einem Intervalle I , so ist nach einem Satze von J. G. Mikusinski für $n = 3$ die Entfernung von zwei in I liegenden konsekutiven Wurzeln von $x(t)$ größer als $2\sqrt[3]{3} \cdot M^{-\frac{1}{3}}$, und es existiert höchstens ein, durch die konsekutiven Wurzeln bestimmtes, Ausnahmeintervall. Für den Fall $n = 4$ hat Verf. in seinem Aufsatz: „Sur les intégrales d'une équation différentielle du 4. ordre“ bewiesen, daß die durch die konsekutiven Wurzeln bestimmten Intervalle in I größer sind als $M^{-\frac{1}{2}}$ und daß höchstens zwei Ausnahmeintervalle existieren. Nach einem klassischen Resultat von Sturm gilt eine analoge Behauptung auch für $n = 2$. Gemäß diesen Ergebnissen kann man die folgende Vermutung aussprechen: Ist die Differentialgleichung $x^{(n)}(t) + A(t)x(t) = 0$ vorgelegt und im Intervalle I $0 \leq A(t) \leq M$, so sind die durch die im Intervalle I liegenden konsekutiven Wurzeln von $x(t)$ [$x(t)$ bedeutet ein beliebiges Integral der vorgelegten Differentialgleichung] bestimmten Intervalle größer als $k_n M^{-1/n}$, und es existieren höchstens $n - 2$ Ausnahmeintervalle. Die Faktoren k_n hängen nur von n ab. Zur Unterstützung dieser Vermutung beweist Verf. in dieser Arbeit folgenden Satz: Betrachten wir die Differentialgleichung $x^{(5)}(t) + A(t)x(t) = 0$. Es sei $A(t)$ stetig und nicht zunehmend im endlichen oder unendlichen Intervalle I , und in diesem gelten die Ungleichung $0 \leq A(t) \leq M$. Dann ist die Länge der durch die im Intervalle I liegenden konsekutiven Wurzeln von $x(t)$ bestimmten Intervalle größer als $(2 + \sqrt[3]{3})^{-1} M^{-\frac{1}{3}}$, und es existieren höchstens 3 Ausnahmeintervalle. Wenn $x(t)$ osculierend ist ($t \rightarrow \infty$), können nur höchstens 2 Ausnahmeintervalle existieren. St. Fenyő (Budapest).

Gremjačenskij, A. P.: Verallgemeinerung eines Satzes von Ljapunov. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 667—668 (1948) [Russisch].

A. M. Liapounoff hat im Jahre 1892 in seiner berühmten Charkower Abhandlung [vgl. die französische Übersetzung: Problème général de la stabilité du mouvement, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, II. s. **9**, 203—474 (1907), insbesondere 409—411; reproduziert in Ann. Math. Studies **17**, Princeton 1947; dies. Zbl. **31**, 189] nachstehenden Satz bewiesen: Sämtliche Lösungen eines Systems von n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung: $dx/dt = \mathfrak{P}(t)x$ mit

$\dot{x} = (x_1, \dots, x_n)$, in welchem die Elemente der Koeffizientenmatrix \mathfrak{B} periodische Funktionen $p_{ij}(t)$ ($i, j = 1, \dots, n$) sind und der Bedingung $\mathfrak{B} \mathfrak{P}(t) + \mathfrak{B}(-t) \mathfrak{B} = 0$ mit reellem konstantem $\mathfrak{B} = (b_{ij})$, $\det \mathfrak{B} \neq 0$, genügen, sind periodisch und durch Quadraturen zu ermitteln, falls alle n Wurzeln λ_i der charakteristischen Gleichung $\det(\mathfrak{B} - \lambda \mathfrak{E}) = 0$ einfach sind und durchweg verschiedene absolute Beträge haben. Verf. zeigt, daß dieser Satz auch bei mehrfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung gültig bleibt, wenn nur jeder solchen Wurzel ein einziger Weierstraßscher Normalteiler von \mathfrak{B} entspricht. *H. Bilharz.*

Kalinin, S. V.: Über die Stabilität periodischer Bewegungen im Falle, daß eine Wurzel gleich Null ist. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 671—672 (1948) [Russisch].

Verf. beweist in sehr gedrängter Form, daß Liapounoffs Untersuchungen über die Stabilität gestörter Bewegungen (vgl. § 28, S. 301f. der im vorangehenden Referat in französischer Übersetzung zitierten Arbeit Liapounoffs) ohne wesentliche Änderungen auf den Fall, in welchem die Koeffizienten der Differentialgleichungen beschränkte periodische Funktionen der Zeit sind, sich übertragen lassen.

H. Bilharz (Freiburg i. Br.).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Caianiello, Eduardo: Il metodo di Mayer e l'integrazione dei sistemi completi di equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine nel campo reale. Giorn. Mat. Battaglini 77, 164—171 (1947).

Verf. beschäftigt sich mit der Integration eines vollständigen Systems linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung, indem er, im Reellen, die klassische Methode von Mayer erweitert, und gelangt zum Existenzsatz unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten des Systems stetige zweite Ableitungen besitzen.

Luigi Amerio (Mailand).

Bellman, Richard: On the existence and boundedness of solutions of nonlinear partial differential equations of parabolic type. Trans. Amer. math. Soc. 64, 21—44 (1948).

L'A. studia l'esistenza e la limitatezza degli integrali dell'equazione di tipo paraboli co

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = F(x, y, z, t, u),$$

che generalizza la classica equazione del calore. Si suppone che il dominio di integrazione sia formato dal cubo R ($0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, $0 \leq z \leq \pi$), di frontiera B e dall'intervallo $0 \leq t < \infty$ per il tempo. All'incognita u sono imposte le condizioni, di tipo classico, $u = 0$ su B , $\lim_{t \rightarrow 0+} u = f(x, y, z)$ entro R . Utilizzando convenienti

sviluppi in serie di Fourier e i metodi dell'Analisi funzionale, l'A. dimostra, tra l'altro che, se f e F soddisfano a convenienti condizioni, esiste una e una sola soluzione che è uniformemente limitata e infinitesima per $t \rightarrow \infty$.

Luigi Amerio (Milano).

Janet, Maurice: Sur un système simple d'équations du second ordre. Ann. Soc. Polonaise Math. 20, 335—346 (1948).

L'A. indica le condizioni alle quali debbono soddisfare le funzioni $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$, $\delta(x, y)$ perchè la soluzione del sistema $r = \alpha p$, $2s = \beta p + \gamma q$, $t = \delta q$ dipenda da tre oppure da due costanti arbitrarie. Nel primo caso si ottiene per $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ un sistema normale di quattro equazioni, la cui integrazione si riduce a quella della classica equazione di Liouville e di un'altra equazione integrabile elementarmente. — Le condizioni ottenute nel secondo caso sono poi utilizzate per la formazione delle equazioni a derivate parziali cui deve soddisfare una funzione $f(x, y)$ perchè l'equazione $dy/dx = f(x, y)$ ammetta un gruppo a un parametro $x' = X(x)$, $y' = Y(y)$.

Luigi Amerio (Milano).

Dramba, Constantin: Sur les singularités de certains systèmes différentiels. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 48, 27—31 (1947).

L'A. considera il sistema differenziale

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z},$$

con $\Delta_2 U = 0$, nell'intorno dell'origine, che suppone sia un punto singolare isolato [$U_x = U_y = U_z = 0$, $\partial(U_x, U_y, U_z)/\partial(x, y, z) \neq 0$]. L'equazione caratteristica

$$\begin{vmatrix} U_{xx}^0 - \lambda & U_{xy}^0 & U_{xz}^0 \\ U_{yx}^0 & U_{yy}^0 - \lambda & U_{yz}^0 \\ U_{zx}^0 & U_{zy}^0 & U_{zz}^0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ha le sue radici reali, non tutte dello stesso segno poichè $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \Delta_2 U^0 = 0$. Sia $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$. Allora, per un teorema di Chazy, vi sono due categorie di soluzioni, di cui si dà una rappresentazione parametrica. La prima categoria corrisponde alle radici positive: le caratteristiche generano una superficie, che è la superficie di Poincaré. La seconda categoria, corrispondente alla radice λ_3 , è la caratteristica isolata di Poincaré, passante per il punto singolare, dove incontra la superficie di Poincaré. — L'A. accenna successivamente a una applicazione al movimento di un fluido nello spazio e all'estensione al caso di n variabili.

Luigi Amerio (Milano).

Ghizzetti, Aldo: Applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace al problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = F$ in n variabili. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 17, 39—74 (1948).

Verf. behandelt mit der Methode der partiellen Laplacetransformation das Dirichletsche Problem für die Gleichung $\Delta_2 u - \lambda^2 u = F$ in n Veränderlichen. Diese Methode läßt die Lösung des Systems von der Lösung eines Systems von Integralgleichungen vom Fischer-Rieszschen Typus abhängen, worin als Unbekannte die Werte der Ableitung $\partial u / \partial n$ in Richtung der Normalen auf einem Teil der Begrenzung des Integrationsgebietes auftreten. Der Beweis dafür, das dieses System zur Bestimmung der Unbekannten $\partial u / \partial n$ hinreicht, wird vom Verf. geführt, indem er die Äquivalenz mit dem (hinreichenden) System beweist, das man erhält, wenn man von der Greenschen Formel bzw. einer das Integrationsgebiet enthaltenden Hyperschicht (iperstrato) ausgeht. Die Greensche Funktion der Hyperschicht wird nach zwei verschiedenen Verfahren erhalten. Besonders bemerkenswert ist in dieser Arbeit der § 3, in dem Verf. die Umkehrung der Funktionaltransformation der Exponentiallösung in der Fundamentallösung der Gleichung $\Delta_2 u - \lambda^2 u = 0$ erhält.

Luigi Amerio (Mailand).

Fichera, Gaetano: Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione $\Delta_4 u = f$. Giorn. Mat. Battaglini 77, 184—199 (1947).

Verf. beweist einige Sätze über die Vollständigkeit im Hilbertschen Sinne für das System $\{v_i\}$ der bihyperharmonischen Polynome. U. a. ergeben sich folgende Resultate: I. Das System der Vektoren mit zwei Komponenten $\{V_i \equiv (v_i, \partial v_i / \partial n)\}$ ist im Hilbertschen Sinne vollständig auf der Begrenzung FD eines Gebietes, vorausgesetzt, daß FD eine Fläche mit stetiger Tangentialebene und Krümmung ist. II. Wenn man, unter denselben Voraussetzungen, FD in zwei Teile $F_1 D$ und $F_2 D$ zerlegt und setzt:

$$w_i(Q) = \begin{cases} \partial v_i(Q) / \partial n, & \text{wenn } Q \in F_1 D, \\ \Delta_2 v_i(Q), & \text{wenn } Q \in F_2 D, \end{cases}$$

so ist das System der Vektoren $\{W_i = (v_i, w_i)\}$ im Hilbertschen Sinne vollständig auf FD .

Luigi Amerio (Mailand).

Višik, M. I.: Die Methode der Orthogonalprojektionen für allgemeine lineare, selbstadjungierte elliptische Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 58, 957—960 (1947) [Russisch].

In einer Abhandlung [dies. Zbl. 29, 130] und in der Dissertation des Verf. wird die biharmonische Gleichung $\Delta\Delta u(x_1, \dots, x_n) = 0$ im willkürlichen beschränkten Gebiet G behandelt. Da die Arbeit nur die Darlegung der Resultate (ohne Beweise) bringt, wollen wir uns mit der Angabe begnügen, daß der verwendete Hilbertsche Raum die n -dimensionalen symmetrischen Matrizen aus Elementen benutzt, die über G im Quadrat summierbar sind und deren Maßbestimmung durch die Formel

$$((h), (h)) = \int_G \dots \int \sum_{i_1, i_2=1}^n h_{i_1 i_2}^2(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

gegeben ist. In der aus früheren Abhandlungen bekannten Methode wird die Aufgabe vom Dirichletschen Typus behandelt, wobei für die Lösung der biharmonischen Gleichung auf der Grenze des Gebietes die Werte von u und $\partial u / \partial n$ vorgegeben sind. Auch die „Neumannsche Aufgabe“ wird in einem bestimmten Sinne verallgemeinert. Gleiches gilt bei geeigneter anderweitiger Wahl der Definition des skalaren Produktes bezüglich der gemischten Randwertaufgabe. Endlich handelt es sich um Verallgemeinerungen dieser Aufgaben bezüglich einer allgemeinen selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichung von der Ordnung $2m$.

Schmeidler (Berlin).

Walters, A. G.: The solution of some transient differential equations by means of Green's functions. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 69—80 (1949).

L'A. espone alcuni metodi per determinare le funzioni di Green delle equazioni:

$$D(\Phi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad D(\Phi) = \frac{1}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

dove t è il tempo, c e k sono costanti, Φ la funzione incognita, dipendente da t e una o più coordinate, D un operatore differenziale rispetto alle coordinate. Mediante le predette funzioni costruisce le soluzioni, corrispondenti ad assegnate condizioni iniziali e al contorno, per le equazioni:

$$D(\Phi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g, \quad D(\Phi) = \frac{1}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g$$

dove g è una funzione nota delle coordinate e del tempo. Infine applica i risultati di questa nota all'equazione di propagazione del calore, all'equazione di d'Alembert e all'equazione biarmonica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = g(r, z, t)$$

dove r, z, Θ sono le coordinate cilindriche di un punto dello spazio.

Graffi.

Kaplan, Wilfred: Topology of level curves of harmonic functions. Trans. Amer. math. Soc. 63, 514—522 (1948).

Le travail fait suite aux mémoires de l'auteur [ce Zbl. 24, 190; 25, 93] sur les familles régulières de courbes du plan (localement homéomorphes à une famille de droites parallèles, en chaque point du plan). On établit que toute famille régulière dans le plan entier est homéomorphe à la famille des courbes de niveau d'une fonction harmonique dans un domaine plan convenable. Suivant que ce domaine est représentable conformément sur le cercle-unité, ou sur le plan pointé, la famille est appelée hyperbolique ou parabolique. Toute famille est hyperbolique, mais il y a une infinité de types, topologiquement distincts, de familles non-paraboliques. Ceci ramène la topologie des courbes de niveau d'une fonction harmonique à celle des familles régulières, objet des travaux antérieurs de l'auteur. L'emploi des domaines riemanniens permet une étude appropriée de la subdivision normale des familles régulières, et entraîne une simplification d'ensemble de la théorie. L'auteur indique plusieurs problèmes encore ouverts.

Calugăreanu (Cluj).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Thielmann, H. P.: On a class of singular integral equations occurring in physics. Quart. appl. Math. **6**, 443—448 (1949).

Certains problèmes aux limites en électrodynamique [cfr. J. F. Carlson and A. E. Heins, ce Zbl. **31**, 138] peuvent être formulés comme équations intégrales de Wiener-Hopf, c'est-à-dire de la forme

$$f(x) = \lambda \int_0^{\infty} K(|x-y|) g(y) dy, \quad x > 0.$$

L'A. indique une voie élémentaire pour la résolution de cette équation dans certains cas particuliers où des conditions restrictives sont satisfaites. Il s'agit des conditions suivantes: 1. l'intégrale $\int_0^{\infty} K(|x-y|) dy$ existe, 2. $K(|x-y|)$ est continue pour toutes les valeurs positives de x et y , 3. $K(|x-y|)$ satisfait à la même équation différentielle linéaire homogène comme fonction de x dans les deux domaines $0 \leq y \leq x$ et $0 \leq x \leq y$. — Voici alors la méthode pour la résolution de l'équation. On remarque d'abord que l'on peut poser

$$K(|x-y|) = \begin{cases} F(x-y) & \text{si } 0 \leq y \leq x, \\ F(-x+y) & \text{si } 0 \leq x \leq y. \end{cases}$$

Il est presque évident que l'équation différentielle à laquelle doivent satisfaire les fonctions $F(x-y)$ et $F(-x+y)$ comme fonctions de x doit être de la forme

$$\left(\sum_{i=0}^l a_{2i} D^{2i} \right) u = 0$$

et l'on conçoit que $2l = n$ soit l'ordre minimum d'une telle équation. — Cela posé, on peut écrire l'équation dans la forme suivante

$$f(x) = \lambda \int_0^x F(x-y) g(y) dy + \lambda \int_x^{\infty} F(-x+y) g(y) dy$$

et alors on voit bien que

$$\begin{aligned} f^{(2i)}(x) &= \lambda \int_0^x F^{(2i)}(x-y) g(y) dy + \lambda \int_x^{\infty} F^{(2i)}(-x+y) g(y) dy \\ &+ 2\lambda [F^{(2i-1)}(0) g(x) + F^{(2i-3)}(0) g''(x) + \dots + F'(0) g^{(2i-2)}(x)] \end{aligned}$$

où $i = 1, 2, \dots, l$. Dès lors

$$\sum_{i=0}^l a_{2i} f^{(2i)}(x) = 2\lambda \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{i=l+1}^l a_{2i} F^{(2i-2i-1)}(0) g^{(2i)}(x)$$

ce qui montre que $g(x)$ doit satisfaire à une équation linéaire à coefficients constants d'ordre $n-2$. Donc si $n=2$, $g(x)$ est représentée explicitement en termes de $f'(x)$ et de $f''(x)$. — L'équation obtenue est une condition nécessaire pour que $g(x)$ soit une solution de l'équation intégrale. — Pour démontrer qu'une telle $g(x)$ satisfait à cette équation on devra substituer la solution générale de l'équation différentielle en g dans l'équation intégrale. En suivront ainsi les conditions d'existence de $g(x)$. — Cette méthode est valable évidemment pour les équations

$$g(x) = \lambda \int_0^{\infty} K(|x-y|) g(y) dy, \quad f(x) = g(x) - \lambda \int_0^{\infty} K(|x-y|) g(y) dy.$$

En appliquant par exemple la méthode indiquée à l'équation

$$f(x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-k|x-y|} g(y) dy, \quad x > 0, \quad k > 0,$$

on trouve que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution $g(x)$ sont:

$$1. \quad kf(0) - f''(0) = 0; \quad 2. \quad g(x) = \frac{k^2 f(x) - f''(x)}{2k\lambda};$$

3. l'intégrale sur l'intervalle $0, \infty$ existe, c'est-à-dire que $g(x)$ soit de l'ordre e^{cx} avec $c < k$.

M. Lampariello (Messine).

Cattaneo, C.: Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 285—288 (1947).

L.A. résout ici l'équation intégrale

$$\int_{-a}^a p(\bar{x}) \log \frac{1}{|\bar{x} - x|} d\bar{x} = A + Bx - Cx^2, \quad |x| \leq a,$$

la fonction inconnue $p(x)$ étant assujettie aux conditions

$$p(-a) = p(a) = 0, \quad p(x) \geq 0, \quad \int_{-a}^a p(x) dx = \text{constante donnée.}$$

On voit aisément que les propriétés bien connues du potentiel logarithmique

$$U(x, y) = \int_{-a}^a p(\bar{x}) \log \frac{1}{r} d\bar{x}$$

avec $r = \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + y^2}$ permettent d'achever le calcul de $p(x)$ qui est de la forme suivante: $p(x) = k\sqrt{1 - x^2/a^2}$.

G. Lampariello (Messine).

Pollard, Harry: Integral transforms. II. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 956—965 (1948).

Die Integralgleichung (1) $f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s-t) \varphi(t) dt$ wird mittels der zweiseitigen Laplace-Transformation formal gelöst durch (2) $\varphi(t) = (1/k(D)) f(t)$ mit $D = \frac{d}{dt}$ und (3) $k(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sz} K(s) ds$. In einer früheren Arbeit [Duke Math. J. 13, 307—330 (1946)] hat der Verf. spezielle Klassen von Kernen K untersucht, für die der Operator in (2) als Grenzwert von Differentialpolynomen aufgefaßt werden kann, wobei φ auf den Raum L^2 beschränkt blieb. Einen anderen Spezialfall hat D. V. Widder (dies. Zbl. 29, 302) behandelt, nämlich daß $\frac{1}{k(z)} = \sigma(z)$ eine ganze Funktion der Form (4) $\sigma(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_n^2}\right)$ mit $0 < a_1 < a_2 < \dots$ und $\sum 1/a_n^2 < \infty$ ist. Diesen Fall studiert der Verf. nun unter einer anderen Voraussetzung, wobei $\sigma(z)$ auch mehrfache Nullstellen haben kann. Satz: $\sigma(z)$ sei eine ganze Funktion der Form (4) mit $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots$, $\sum 1/a_n^2 < \infty$. Für ein $\beta > 0$ erfülle $k(z) = 1/\sigma(z)$ die Bedingung $k(x + iy) = O(e^{-\beta|y|})$ für $|y| \rightarrow \infty$ gleichmäßig in jedem Streifen $|x| \leq R$. Dann gestattet $k(z)$ die Darstellung (3) für $-a_1 < x < a_1$. Wenn (1) für ein s konvergiert, so konvergiert es für alle s , und (1) besitzt die Umkehrungsformel

$$\varphi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_1^N \left(1 - \frac{D^2}{a_n^2}\right) f(t)$$

für fast alle t .

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Good, I. J. and G. E. H. Reuter: Bounded integral transforms. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 19, 224—234 (1948).

Der Satz von Watson, der die Bedingung dafür angibt, daß die φ -Transformation $\int_0^x g(t) dt = \int_0^{\infty} \varphi(x, t) f(t) dt$ im Raume L^2 durch dieselbe Transformation umgekehrt werden kann, ist in verschiedener Weise in Richtung folgender

Fragestellung verallgemeinert worden: Es sei g die φ -Transformierte und h die ψ -Transformierte derselben Funktion f . Unter welchen Bedingungen ist dann f gleichzeitig die ψ -Transformierte von g und die φ -Transformierte von h ? Die Verff. beweisen eine Reihe von Sätzen über allgemeine lineare Transformationen, die jene Verallgemeinerungen enthalten und zugleich den wesentlichen Unterschied zwischen ihnen an den Tag bringen. Die hauptsächlichsten Sätze sind die folgenden: Theorem III. Eine beschränkte lineare Transformation Tf hat eine Adjungierte T^* , und T, T^* werden durch adjungierte Kerne φ, φ^* erzeugt. Dabei gelten folgende Definitionen: T heißt beschränkt, wenn es eine Konstante B gibt

derart, daß $\int_0^\infty (Tf)^2 dx \leq B^2 \int_0^\infty f^2 dx$ für jedes reelle $f \in L^2$; T und T^* heißen

adjungiert, wenn $\int_0^\infty Tf \cdot g dt = \int_0^\infty f \cdot T^*g dt$ für alle Paare $f, g \in L^2$; zwei Kerne

φ, φ^* heißen adjungiert, wenn $\int_0^y \varphi(x, t) dt = \int_0^x \varphi^*(y, t) dt$ für alle $x > 0, y > 0$.

Theorem V. T_φ und T_ψ seien beschränkt. Dann gilt $T_\psi(T_\varphi f) = f$ dann und nur dann, wenn φ^* und ψ biorthogonal sind, d. h. $\int_0^\infty \varphi^*(x, t) \psi(y, t) dt = \min(x, y)$.

— Aus diesen Sätzen ergibt sich eine der oben erwähnten Verallgemeinerungen des Watsonschen Satzes, nämlich die von S. Bochner [Ann. Math., Princeton, II. s. 35, 111—115 (1934); dies. Zbl. 9, 116] und S. Kaczmarz [Studia math., Leopold 4, 146—151 (1933); dies. Zbl. 9, 117], die sich auf ein inverses Paar von unitären Transformationen bezieht. — Ebenso ergibt sich aus einem von den Verff. bewiesenen Satz (Theorem E), der ein inverses Paar von selbstadjungierten Transformationen behandelt, eine andere Verallgemeinerung von H. Kober [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 8, 172—185 (1937); dies. Zbl. 17, 169]. Doetsch.

Loewner, Charles: A topological characterization of a class of integral operators. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 316—332 (1948).

Eine geschlossene, orientierte Kurve in der xy -Ebene heißt von nichtnegativer Zirkulation, wenn ihre Ordnung bezüglich jedes nicht auf ihr liegenden Punktes

nichtnegativ ist. Wird der Integraloperator $y(t) = -\int_0^{2\pi} k(\tau) x(t - \tau) d\tau$, wo $k(t)$

im Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$ L^1 -integrabel sein soll, auf eine stetige Funktion $x(t)$ mit der Periode 2π angewandt, so entsteht eine Funktion $y(t)$, die auch stetig und von der Periode 2π ist. Das Funktionenpaar $x = x(t), y = y(t)$ stellt eine geschlossene orientierte Kurve in Parameterform dar. Jede so gewonnene Kurve heißt „erzeugt durch den Kern $k(t)$ “. Satz: Die Kernfunktion $k(t)$ erzeugt dann und nur dann lauter Kurven von nichtnegativer Zirkulation, wenn sie nach eventueller Abänderung in einer Nullmenge im offenen Intervall $0 < t < 2\pi$ ana-

lytisch ist und ihre Derivierte durch ein Laplace-Stieltjes-Integral $k'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu(r)$ mit nichtabnehmender Belegungsfunktion $\mu(r)$ dargestellt werden kann (also voll-monoton ist). Doetsch (Freiburg i. Br.).

Boas jr., R. P.: Exponential transforms and Appell polynomials. Proc. nat. Acad. Sci. USA 34, 481—483 (1948).

Ein Integral der Form $\int_0^\infty e^{\alpha z t} f(t) dt$ mit $|\alpha| = 1$ heißt eine Exponential-transformierte ($\alpha = -1$: Laplace-Transformierte; die Fourier-Transformierte ist die Summe zweier Exponentialtransformierten mit $\alpha = i$ und $\alpha = -i$). Satz: Eine Funktion, die in einem geschlossenen, beschränkten, konvexen Polygon

mit m Seiten analytisch ist, läßt sich als Summe von m Exponentialtransformierten in diesem Polygon darstellen. — Der Beweis ergibt sich aus der Cauchyschen Integraldarstellung $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int F(t) (t-z)^{-1} dt$ (das Integral über die Polygonseiten L_k erstreckt), wenn man $(t-z)^{-1}$ auf jeder Polygonseite L_k durch $\alpha_k \int_0^\infty e^{-\alpha_k(t-z)u} du$ mit geeignet gewähltem α_k ($|\alpha_k| = 1$) ausdrückt und die Reihen-

folge der Integrationen vertauscht. — Mit diesem Satz kann man die Entwicklung einer Funktion nach Appellschen Polynomen angreifen. Eine Appellsche Polynomfolge entsteht aus einer erzeugenden Funktion $A(t)$ durch die Gleichung

$$A(t) e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n p_n(z).$$

Setzt man die hieraus entspringende Darstellung für $e^{\alpha_k z t}$

in $F(z) = \sum_{k=1}^m \int_0^\infty e^{\alpha_k z t} f_k(t) dt$ ein, so ergibt sich formal:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) \sum_{k=1}^m \alpha_k^n \int_0^\infty \frac{f_k(t)}{A(\alpha_k t)} t^n dt,$$

also eine Entwicklung nach den Polynomen $p_n(z)$. Die exakte Durchführung erfordert ein genaueres Studium des Verhaltens von $A(t)^{-1}$ und soll an anderer Stelle erscheinen. Man gewinnt so einen neuen Zugang zu den Ergebnissen von Sheffer, Bull. Amer. math. Soc. **47**, 885—898 (1941); dies. Zbl. **27**, 395. Doetsch.

● **Humbert, P. and S. Colombo: Le calcul symbolique et ses applications à la physique mathématique.** (Mémorial Sci. math. Nr. 105) Paris: Gauthier-Villars 1947. 52 p. 250 fr.

Dieses Heft zeigt einen auffallenden Niveauunterschied gegenüber den meisten Bänden der bekannten Sammlung „Mémorial“. Die Schilderung des Heavisidekalküls bzw. der Operatorenrechnung oder, in moderner Bezeichnung, der Laplace-Transformation entspricht ungefähr dem Zustand vor 25 Jahren. Der größte Teil der ernsthaften Literatur über den Gegenstand scheint den Verff. unbekannt geblieben zu sein, wie z. B. Ref., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (Berlin 1937; dies. Zbl. **18**, 129); K. W. Wagner, Operatorenrechnung (Leipzig 1940); dies. Zbl. **23**, 395); Carslaw und Jaeger, Operational methods in applied mathematics (1941); Ghizzetti, Calcolo simbolico (1943); Churchill, Modern operational methods in engineering (1944). Statt dessen werden eine Menge von mathematisch unzulänglichen Arbeiten zitiert. Als Anwendung werden durchgeführt: Die Herleitung von Eigenschaften einiger in der Physik vorkommender Funktionen und die Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Von partiellen Differentialgleichungen (dem Hauptanwendungsgebiet der Theorie) wird nur die reine Schwingungsgleichung $\partial^2 v / \partial t^2 = C^2 \partial^2 v / \partial x^2$ im Intervall $-\infty < x < \infty$ auf knapp 2 Seiten behandelt. Doetsch (Freiburg i. Br.).

Akutowicz, Edwin J.: The third iterate of the Laplace transform. Duke math. J. **15**, 1093—1132 (1948).

Der Verf. behandelt die 3-fach iterierte L -Transformierte

$$f(x) = \int_{0+}^{\infty} e^{-x\varrho} d\varrho \int_{0+}^{\infty} e^{-\varrho\sigma} d\sigma \int_{0+}^{\infty} e^{-\sigma\tau} d\alpha(\tau),$$

wobei $\alpha(\tau)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung in jedem Intervall (ε, R) darstellt und $0 < \varepsilon < R < \infty$, $\int_{0+}^{\infty} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^R$. Die vom Verf. angewendeten Me-

thoden und erhaltenen Resultate sind im wesentlichen analog denjenigen von Boas und Widder [Trans. Amer. math. Soc. **45**, 1—72 (1939); dies. Zbl. **20**, 133].

Im ersten Teil zeigt der Verf., daß jede L_3 -Transformierte

$$f(x) = \int_{0+}^{\infty} e^{xt} E(xt) d\alpha(t), \quad \text{wobei} \quad E(x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{-1} dt,$$

als 3-fach iterierte L -Transformierte betrachtet werden kann, und gibt einige allgemeine Eigenschaften derselben. Im 2. Teil behandelt der Verf. das Umkehrproblem unter recht allgemeinen Voraussetzungen über die erzeugende Funktion $\alpha(t)$. Im 3. Teil gibt er einige allgemeine Darstellungssätze, welche Funktionen sich als L_3 -Transformierte mit bestimmten Funktionsklassen als Erzeugende darstellen lassen. Saxer (Zürich).

Macfarlane, G. G.: The application of Mellin transforms to the summation of slowly convergent series. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, VII. s. 40, 188—197 (1949).

Die Summation von Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} f(n+a)$ kann in folgender Weise bewerkstelligt werden. $f(x)$ läßt sich mittels seiner Mellin-Transformation $F(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx$ so darstellen: $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) x^{-s} ds$. Setzt man $x = n+a$, summiert über n und vertauscht Summation und Integration, so erhält man:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) \zeta(s, a) ds \quad \text{mit} \quad \zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}.$$

Das Integral wird unter Verbiegung des Integrationsweges durch Residuenrechnung ausgewertet. Verf. führt drei Beispiele durch, in denen er für langsam konvergente Reihen auf diesem Weg einen geschlossenen Ausdruck bzw. eine rasch konvergente Reihe bzw. eine asymptotische Darstellung bekommt. Eine Tafel mit 72 Mellin-Transformationen ist beigefügt. Doetsch (Freiburg i. Br.).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Mikusiński, Jan G.: Sur la méthode de généralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible. Fundam. Math., Warszawa 35, 235—239 (1948).

Die Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs von L. Schwartz [siehe den Bericht über diese Theorie in dem Referat über die Arbeit Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys., II. s. 23, 7—24 (1928); dies. Zbl. 30, 126] wird auf abstrakte Räume erweitert. Bei Schwartz bestanden die Objekte der neuen Analysis aus allen „Distributionen“ (Funktionalen), die für den Raum Φ der beliebig oft differenzierbaren und außerhalb eines Intervalles verschwindenden Funktionen φ definiert sind. Verf. legt statt dessen drei abstrakte Räume F, Φ, C mit den Elementen f, φ, c zugrunde; in C muß ein Konvergenzbegriff definiert sein, der gewissen Folgen $c_n \in C$ Grenzelemente $c \in C$ zuordnet: $\lim c_n = c$. Jedem Paar f, φ ist als „Komposition“ $f\varphi$ ein Element von C zugeordnet: $f\varphi = c$. In F wird nun eine Topologie durch schwache Konvergenz hinsichtlich Φ eingeführt: Eine Folge $f_n \in F$ heißt gegen f schwach konvergent: $\widetilde{\lim} f_n = f$, wenn $\lim f_n \varphi = \lim c_n(\varphi) = f\varphi$ für jedes $\varphi \in \Phi$ gilt. Wenn zwar die Folgen $f_n \varphi = c_n(\varphi)$ (für jedes φ) in C konvergieren, es aber kein $f \in F$ gibt, so daß $\lim f_n \varphi = f\varphi$ ist, so wird die Gesamtheit aller Folgen f_n mit demselben $\lim f_n \varphi$ (für alle φ) zu einem neuen Element f vereinigt, das als der schwache Limes der f_n aufgefaßt wird. Diese „Häufungspunkte“ \bar{f} werden zu F adjungiert, wodurch die abgeschlossene Hülle \bar{F} entsteht. An die Stelle der einzelnen Distribution von Schwartz tritt der Inbegriff aller $f\varphi$ mit festem $f \in F$ und beliebigem φ , der durch f charakterisiert ist und einfach mit f bezeichnet wird. Für diesen neuen verallgemeinerten Funktions-

begriff müssen nun die grundlegenden Operationen wie Addition, Integration usw. definiert werden. Dazu wird allgemein der Begriff der „regulären Operation“ $r = R(f^1, \dots, f^k)$ aufgestellt, der durch die Eigenschaften charakterisiert ist:

1° Wenn die Folgen f_n^1, \dots, f_n^k schwach konvergieren, so gilt dasselbe für die Folge $r_n = R(f_n^1, \dots, f_n^k)$. 2° Wenn $\widetilde{\lim} f_n^i = \widetilde{\lim} g_n^i$ ($i = 1, \dots, k$), so ist auch $\widetilde{\lim} R(f_n^1, \dots, f_n^k) = \widetilde{\lim} R(g_n^1, \dots, g_n^k)$. Doetsch (Freiburg i. Br.).

Ryll-Nardzewski, Czesław: Une remarque sur la convergence faible. Fundam. Math., Warszawa 35, 240—241 (1948).

Es wird gezeigt, daß in der vorstehend referierten Arbeit die zur Charakterisierung der „regulären Operation“ aufgestellte Eigenschaft 2° entbehrt werden kann, wenn der Konvergenzbegriff im Raum C gewissen einschränkenden Bedingungen unterworfen wird (Teilfolgen einer konvergenten Folge sollen denselben Limes haben, und durch Verzahnung zweier konvergenter Folgen mit demselben Limes soll der Limes nicht geändert werden). Doetsch (Freiburg i. Br.).

Nachbin, Leopoldo: Über das Axiom der nicht konvergenten Folgen in einigen linearen topologischen Räumen. Rev. Un. mat. Argentina 12, 129—150 (1947) [Spanisch].

Man betrachtet über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen einen linearen Raum E im Sinne von Banach [Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932 (dies. Zbl. 5, 209); s. dort S. 26, 53]. Ihm kommt eine Norm $\Phi(x)$ mit gewissen Eigenschaften zu, die in E eine normierbare Konvergenztopologie T mit folgender Bedeutung schafft: Gilt $x_m \in E$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), $x \in E$, so bezeichnet man x_m mit Bezug auf (m. B. a.) T als x -strebige ($x_m \rightarrow x$) dann und nur dann, wenn $\Phi(x_m - x) \rightarrow 0$ mit $m \rightarrow \infty$. Die Punktfolge $\{x_m\}$, deutlicher $\{x_m\}_m$ heißt beschränkt m. B. a. T , wenn die Zahlenfolge $\{\Phi(x_m)\}$ beschränkt ist. Sind T', T'', T''' drei normierbare Topologien (T.) in E , erklärt durch die Normen Φ, Φ', Φ'' , so nennt man das geordnete Paar T', T'' in T enthalten, in Zeichen: $T' > [T'', T''']$ (Beziehung \mathfrak{T}), wenn jede Punktfolge aus E , die m. B. a. T'' beschränkt ist und m. B. a. T''' gegen den Ursprung ϑ strebt, m. B. a. T gegen ϑ strebt. Zu den wichtigsten Forderungen, denen eine T. in E , sie sei normierbar oder nicht, genügen soll, gehört das folgende „Axiom der nicht konvergenten Folgen (A. d. n.-k. F.)“. Wenn eine Folge $X = \{x_m\}$, $x_m \in E$ m. B. a. T nicht gegen einen Punkt $x \in E$ strebt, so gibt es eine Teilfolge \mathfrak{X} von X , so daß jede Teilfolge von \mathfrak{X} m. B. a. T gleichfalls nicht gegen x strebt. Jede normierbare Konvergenz-T. erfüllt diese Forderung. — Es sei T_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) eine Folge normierbarer T.en in E und $T = \bigcup_0^\infty T_n$ eine vereinigende Konvergenz-T. in folgendem Sinne: Wenn $x_m \in E$, $x \in E$, so bezeichnet man x_m m. B. a. T als x -strebige dann und nur dann, wenn es mindestens ein $n \geq 0$ gibt, so daß $x_m \rightarrow x$ m. B. a. T_n . — T braucht weder normierbar zu sein, noch dem A. d. n.-k. F. zu genügen. Sie genügt ihm vielmehr dann und nur dann, wenn man jedem $n \geq 0$ eine ganze Zahl $N(n) \geq 0$ so zuordnen kann, daß $T_N > [T_n, T_s]$ für $r = 0, 1, \dots, n$ und $s = 0, 1, \dots, n, \dots$. — Wenn $T_n \subset T_{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), wenn also T_n Unter-T. von T_{n+1} ist, so besteht die kennzeichnende Bedingung \mathfrak{E} dafür, daß T das A. d. n.-k. F. befriedige, in folgendem: Jedem $n \geq 0$ gehört ein $N(n) > n$ so zu, daß $T_N > [T_n, T_s]$ für $s = N + 1, N + 2, \dots$. Hinreichend ist die Bedingung $T_N > [T_r, T_s]$ bei beliebigen ganzen $N, r, s \geq 0$ von der Art, daß $r < N < s$. Das sind die vom Verf. in Summa Brasil. Math. 1 (1946) bewiesenen Sätze. Hier befaßt er sich mit derselben Frage \mathfrak{F} des Verhaltens der Konvergenz-T. zum A. d. n.-k. F. in gewissen topologischen linearen Räumen $[A]$, deren Punkte Zahlenfolgen sind. Es sei nämlich $A = \langle a_m^n \rangle$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$) eine Matrix mit reellen, positiven Elementen, und $[A]$ werde durch

$$[A] = \bigcup_0^\infty [a_n], \quad a_n = \{a_m^n\}_m \in E$$

erklärt, wo \bigcup die Vereinigung der Mengen a_n andeutet. Linearer Unterraum von E

ist $[A]$ dann und nur dann, wenn jedem Paare ganzer Zahlen $p, q \geq 0$ eine ganze Zahl $N(p, q) \geq 0$ so zugehört, daß $\|a_N/a_p\| < +\infty$, $\|a_N/a_q\| < +\infty$ ist, das Zeichen der Norm $\|x\|$ im Sinne von $\sup_{m \geq 0} |x_m|$ verstanden. — Zu bequemer

Antwort auf § führt Verf. den Begriff der zu einer Folge $\{\beta_m\}$ ($\beta_m > 0$) subinfinite-simalen (si.) Folge $\{\alpha_m\}$ ($\alpha_m > 0$) ein: entweder läßt sich aus $\{\beta_m\}$ keine null-strebige Folge herausgreifen; oder, wenn im gegenteiligen Falle $\beta_{m_k} \rightarrow 0$ strebt bei jeder wachsenden Folge nicht-negativer, ganzer m_k , $k \rightarrow \infty$, so gilt $\alpha_{m_k} \rightarrow 0$. — Die kennzeichnenden Bedingungen \mathfrak{R} dafür, daß die Konvergenz-T. in $[A]$ dem A. d. n.-k. F. genüge, lautet so: Jedem $n \geq 0$ gehört ein $N(n) \geq 0$ so zu, daß die Folge $\{a_m^N/a_m^r\}_m$ si. sei zu $\{a_m^s/a_m^N\}_m$ für jedes $r = 0, 1, \dots, n$ und $s = 0, 1, \dots, n, \dots$. Eine hinreichende Bedingung \mathfrak{S} desselben Sachverhalts besagt, daß $(a_m^{n+1}/a_m^n) \rightarrow 0$, wenn $m \rightarrow \infty$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Verf. zeigt, daß \mathfrak{R} nicht gegenstandslos ist, indem er eine Matrix angibt, die zwar einen linearen Unterraum, aber eine T. bestimmt, die dem A. d. n.-k. F. nicht genügt. — Es folgen Beispiele topologischer linearer Räume, die dieses Axiom nach \mathfrak{S} erfüllen: (1) Der Raum der in einem abgeschlossenen Kreise holomorphen Funktionen (s. Banach, a. a. O., S. 11). — (2) Der Raum der ganzen Funktionen eines Exponentialtyps, der unter einer gegebenen positiven Zahl liegt [s. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funk-tionentheorie II, Leipzig 1927, S. 234]. — (3) Der Raum der ganzen Funktionen, deren Ordnung unter einer gegebenen positiven Zahl verbleibt [s. ebd.]. — Als weiteres Beispiel betrachtet Verf. (4) den Raum der auf einer gegebenen ab-geschlossenen Menge holomorphen Funktionen, der von verschiedenen Urhebern behandelt ist [s. z. B. L. Fantappiè, Jber. Deutsche Math.-Verein. 43, 1—25 (1933); dies. Zbl. 8, 17]. Die Gültigkeit des A. d. n.-k. F. beweist Verf. hier durch \mathfrak{C} . Als Mittel zur Aufstellung einer ternären Beziehung der Art \mathfrak{T} erscheint Hadamards Drei-Kreise-Satz. — Verf. schließt mit einem Satze, der sich auf die analytischen Fortsetzungen der Mitglieder einer Folge holomorpher Funktionen und ihre Grenzfunktion bezieht.

L. Koschmieder (Aleppo).

Ghika, Al.: Sur une propriété des espaces de fonctions p -sommables ($p > 1$). Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 48, 77—87 (1947).

D sei das Innere eines Kreises der komplexen z -Ebene oder ein einfach zu-sammenhängendes, durch analytische Kurvenbogen begrenztes Gebiet, L sei der Rand, \bar{D} der abgeschlossene Bereich $D + L$. $C_p(\bar{D})$ bedeute den Raum der Funk-tionen $f(z)$, für die $|f(z)|^p$ längs L summierbar ist und die für jedes x aus der Kom-plementärmenge von \bar{D} die Bedingung $\int_{\bar{L}} \frac{f(z)}{z-x} dz = 0$ erfüllen. Es wird gezeigt:

Jede Funktion $F(z)$, für die $|F(z)|^p$ ($p > 1$) längs L summierbar ist, ist in der Form $F(z) = f(z) + \overline{g(z)} ds/dz$ darstellbar, wo $f(z)$ und $g(z)$ zu $C_p(\bar{D})$ gehören und s die Bogenlänge von L bedeutet.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Hilding, Sven H.: Note on completeness theorems of Paley-Wiener type. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 953—955 (1948).

$\{f_n\}$ sei eine vollständige Folge im Hilbertschen Raum \mathfrak{H} und $\{g_n\}$ eine Folge aus \mathfrak{H} . Es handelt sich um die Frage, für welche λ und k aus dem Bestehen der Ungleichung

$$\left\| \sum_1^N \alpha_n (f_n - g_n) \right\| \leq \lambda \left[\left\| \sum_1^N \alpha_n f_n \right\|^k + \left\| \sum_1^N \alpha_n g_n \right\|^k \right]^{1/k}$$

für jede komplexe Folge $\{\alpha_n\}$ und jedes N die Vollständigkeit von $\{g_n\}$ geschlossen werden kann. H. Pollard [Ann. Math., Princeton, II. s. 45, 738—739 (1944)] zeigte, daß es für $k = 2$, $\lambda < 1$ bzw. $k = 1$, $\lambda < 1/\sqrt{2}$ zutrifft. Verf. beweist, daß aus der Ungleichung die Vollständigkeit folgt, wenn $k > 0$, $\lambda < \text{Min}(1, 2^{1-1/k})$ ist, und daß dies die beste Schranke für λ ist.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Praktische Analysis:

● Willers, F. A.: *Practical analysis*. Trans. by R. T. Beyer. New York: Dover 1948. X, 422 p. \$ 6,00.

Bodewig, E.: **Konvergenztypen und das Verhalten von Approximationen in der Nähe einer mehrfachen Wurzel einer Gleichung.** Z. angew. Math. Mech. 29, 44—51 (1949).

Zunächst wird ein Maß für die Konvergenz einer Folge aufgestellt, und der „Grad der Konvergenz“ definiert. Dann ist es möglich, zwei Lücken in der Theorie der Approximationsmethoden zu schließen. Dies wird angewandt auf die Approximation der Wurzeln einer Gleichung, und es wird gezeigt, daß die Konvergenz fast jeder Methode abhängt von der Vielfachheit der zu approximierenden Nullstelle. Z. B. gilt dies für die Newtonsche Methode und ähnliche Methoden, für die Laguerresche Methode und für eine allgemeine Methode zur Konvergenz n -ten Grades. (Autoreferat.) *Nyström* (Helsinki).

Bodewig: **Über die Methode von Graeffe.** Z. angew. Math. Mech. 29, 91—93 (1949).

Die Note enthält im wesentlichen die Mitteilung der vom Verf. in einer früheren Arbeit [s. Quart. appl. Math. 4, 177—190 (1946)] entwickelten Resultate, die vollständige Lösung der durch Zerfall von $f_k(X) = 0$ entstehenden Gleichungen $M_1(X) = 0$, $M_2(X) = 0$, ..., $M_j(X) = 0$ mit den Gradzahlen n_1, n_2, \dots, n_j ($n_1 + n_2 + \dots + n_j = n$) betreffend, wenn unter $f_k(X) = 0$ die aus der ursprünglichen Gleichung $f(X) = 0$ vom Grade n für die vorgegebene Genauigkeit in der bekannten Weise durch den Prozeß der Wurzelquadrierung gewonnene Gleichung verstanden wird. — Es wird insbesondere festgestellt, daß die schematische Ausführung der Graeffe-Transformationen bis zur Aufspaltung allen Kunstgriffen überlegen ist, da diese Methode quadratisch-konvergente Folgen liefert. Quadratische Konvergenz einer Folge x_1, x_2, \dots mit dem Grenzwert X liegt dabei dann vor, wenn $\lim (X - x_{n+1})/(X - x_n)^2 = c \neq 0$. Ferner wird dargetan, daß der aufgezeigte Weg der Lösung jeder Gleichung $M_1(X) = 0$, $M_2(X) = 0$, ..., $M_j(X) = 0$, gefolgt von dem vereinfachten Kunstgriff von Carvallo, die einzig sichere, nie versagende und dabei vorteilhafteste Methode der Durchführung des Graeffe-Verfahrens zur Gleichungsauflösung ist. *G. Wünsche* (München).

Bertiau, F.: **Allgemeine Methode für die angenäherte Lösung von Gleichungen und Systemen mit zwei oder mehr Unbekannten.** Simon Stevin, wis. natuurr. Tijdschr. 26, 90—103 (1948/49) [Holländisch].

Der Gleichung $f(x) = 0$ wird die Form $x = g(x)$ gegeben, so daß die Lösung durch den Schnitt der Geraden $y = x$ mit der Kurve $y = g(x)$ bestimmt werden kann. Als erste Näherung wählt man den Schnitt einer bestimmten Sehne $P_1 P_2$ mit der Geraden $y = x$. Der Punkt P_1 kann zunächst frei gewählt werden, Abszisse x_1 , Ordinate y_1 . Punkt P_2 wird so gewählt, daß seine Abszisse $x_2 = y_1$ wird; seine Ordinate sei $y_2 = g(x_2) = x_3$. Dann ist ein Näherungswert $x_4 = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 + x_2 - 2x_3}$, der in gleicher Weise verbessert werden kann. Voraussetzung für die Konvergenz des Verfahrens ist, daß in der Umgebung der gesuchten Wurzel $g(x)$ stetig und daß $|g'(x)| < 1$ ist. Wenn $-0,8 \geq g'(x) > -1$ ist, so kann als Näherung $x_3 = (x_1 + x_2)/2$ gewählt werden. — Die Übertragung auf das Räumliche liefert Formeln für Näherungslösungen bei 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten von der Form $f(x, y) = 0$ und $g(x, y) = 0$, Formeln, die in Einzelfällen noch vereinfacht werden können. — Ein Ausblick auf die Lösungen von n Gleichungen mit n Unbekannten schließt die Arbeit. *Meyer zur Capellen* (Aachen).

Lahaye, Edmond: **Sur la résolution des systèmes d'équations transcendentes.** Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. s. 34, 809—827 (1948).

Verf. hat früher [C. r. Acad. Sci., Paris **198**, 1840—1842 (1934); dies. Zbl. **9**, 175]; Sur la représentation des racines de certains systèmes d'équations transcendentes. 2. Congr. nat. Sci. 1935, **1**, 141—146] eine Lösungsmethode für spezielle Klassen von Systemen transzendenter Gleichungen entwickelt. Diese Methode wird hier auf eine sehr allgemeine Kategorie solcher Gleichungssysteme ausgedehnt, und es wird ein Weg zur praktischen Durchführung der Rechnungen aufgezeigt. Die Methode läßt sich etwa so kennzeichnen: Durch Einführung geeigneter Konstanten und eines reellen Parameters t wird Bewegungsfreiheit gewonnen, um singuläre Stellen und die Nullstellen gewisser Funktionaldeterminanten zu vermeiden. Es entsteht ein System von Funktionen, die in $0 \leq t \leq 1$ regulär sind und die für $t = 1$ Lösungswerte des Gleichungssystems liefern. — Man wird dies Verfahren als eine Art von Resolventenbildung bezeichnen können. *R. Schmidt.*

Salzer, Herbert E.: Coefficients for complex quartic, quintic, and sextic interpolation within a square grid. J. Math. Physics, Massachusetts **27**, 136—156 (1948).

Eine analytische Funktion $f(z)$ der komplexen Veränderlichen z sei durch ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades dargestellt. Die Lagrangesche Interpolationsformel für $f(z) = f(z_0 + Ph)$, worin h die Maschenweite des über die komplexe Zahlenebene gelegten quadratischen Netzes und $P = p + iq$ die komplexe Tafeldifferenz bedeutet, liefert die Form

$$\sum L_v^{(n-1)}(P) f(z_v).$$

Während in einer früheren Arbeit [A. N. Lowan und H. E. Salzer, Coefficients for interpolation within a square grid in the complex plane, J. Math. Physics, Massachusetts **23**, 156—166 (1944)] die Entwicklung der $L_v^{(n-1)}(P)$ formelmäßig und zahlenmäßig für $n = 3$ und $n = 4$ gegeben wurde, wird diese hier auf $n = 5, 6$ und 7 erweitert. Hierbei bewegen sich p und q unabhängig voneinander von $0,0$ bis $1,0$ in Intervallen von $0,1$. — Unter Anwendung gewisser Formeln des Verf. [A new formula of inverse interpolation, Bull. Amer. math. Soc. **5**, 513—516 (1944)] können die vorliegenden Tafeln auch für die inverse Interpolation benutzt werden.

Meyer zur Capellen (Aachen).

Salzer, Herbert E.: Coefficients for facilitating trigonometric interpolation. J. Math. Physics, Massachusetts **27**, 274—278 (1949).

Rubbert, F. K.: Beitrag zur inversen Interpolation. Z. angew. Math. Mech. **29**, 93—94 (1949).

Die inverse Interpolation läuft auf eine c -Stellenbestimmung des Interpolationspolynoms hinaus. Verf. sucht die damit gegebenen Schwerfälligkeiten zu vermeiden dadurch, daß er auf die eigentliche Inversion der Interpolationsformeln verzichtet. Statt dessen läßt er Argumentwerte und Funktionswerte ihre Rollen vertauschen, und macht nunmehr von Interpolationsformeln (für nicht-äquidistante Teilung) direkten Gebrauch. — Durchführung für quadratische Interpolation. *R. Schmidt.*

Kopal, Zdeněk: A table of the coefficients of the Hermite quadrature formula. J. Math. Physics, Massachusetts **27**, 259—261 (1949).

Heinrich, H.: Genauigkeitsvergleich für die Halbschnittverfahren der graphischen Integration. Z. angew. Math. Mech. **29**, 51—52 (1949).

Es handelt sich um graphische Integration der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ durch das Sehnenverfahren sowie durch das Tangentenverfahren ohne oder mit anschließender Iteration [vgl. Z. angew. Math. Mech. **20**, 121—123 (1940); dies. Zbl. **24**, 47].

Nyström (Helsinki).

Klassische theoretische Physik.

Supino, C.: Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. **3**, 81—86 (1947).

L'A. expose quelques remarques critiques sur les fondements de l'analyse dimensionnelle. — Lorsqu'on considère une grandeur physique y et on assume de

savoir qu'elle est une fonction de plusieurs grandeurs q_1, \dots, q_n de dimensions différentes entre elles et aussi de plusieurs paramètres a_1, \dots, a_m de dimensions nulles on dit qu'il est toujours possible de représenter la grandeur y de la façon suivante

$$y = q_1^{a_1} \dots q_p^{a_p} \varphi(N_{p+1}, \dots, N_n; a_1, \dots, a_m)$$

q_1, \dots, q_p étant p grandeurs fondamentales, indépendantes entre elles au point de vue de leurs dimensions, telles que le monôme $q_1^{a_1} \dots q_p^{a_p}$ et y soient homogènes, φ étant une fonction des paramètres a et des rapports de q_{p+1}, \dots, q_n à des monômes du type suivant $q_1^{\pi_1} \dots q_p^{\pi_p}, \dots, q_1^{\nu_1} \dots q_p^{\nu_p}$. Or, une telle représentation est possible sous les conditions suivantes: 1. il existe une équation dimensionnelle pour toute grandeur physique, ce qui n'a pas encore été démontré en général jusqu'ici. — 2. le théorème de Riabuchinski-Buckingham est valable. — D'autre part il faut remarquer que ce théorème, qui découle à son tour du principe d'homogénéité, exige qu'il existe un système d'équations homogènes entre y, q_1, \dots, q_n et que ce système admet une solution déterminée. Enfin il peut se faire que le problème de la représentation de y comporte des solutions différentes selon la théorie et les critères qu'on propose de suivre pour atteindre le but envisagé. Dans cette Note l'A. démontre sur des exemples tirés de la Science des constructions qu'en se reportant particulièrement aux transformations entre l'original et son modèle il peut arriver qu'une même transformation provienne de plusieurs théories indépendantes et même contradictoires entre elles, c'est-à-dire de plusieurs systèmes d'équations traduisant mathématiquement le même phénomène physique. *G. Lampariello.*

Supino, G.: Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 87—101 (1947).

En poursuivant les idées qui ont fait l'objet d'une note précédente (voir le rapport précédent), l'A. démontre ici que lorsqu'on a obtenu par plusieurs théories différentes des représentations dimensionnelles au sens de Riabuchinski-Buckingham d'une grandeur physique y par les mêmes grandeurs q_1, \dots, q_n et les mêmes paramètres a_1, \dots, a_m de dimensions nulles, la structure de la fonction φ ne peut pas être déterminée que par l'expérience, laquelle permet de constater que la grandeur y dépend effectivement des seuls nombres $N_{p+1}, \dots, N_n, a_1, \dots, a_m$, mais ne constitue pas une vérification expérimentale de la théorie qui est à l'origine de la représentation envisagée. *G. Lampariello (Messine).*

Mechanik:

• Timoshenko, S. and D. H. Young: Advanced dynamics. New York and London: McGraw-Hill Book Co., Inc. 1948. XII, 400 p. 33 s.

• Schlink, Wilhelm: Technische Statik. 4. u. 5. Aufl. Unter Mitarbeit von Heinrich Dietz. Ein Lehrbuch zur Einführung ins Technische Denken. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1948. X, 431 S. und 551 Abb. DM 27.60.

Verf. behandeln in dem bestbewährten, nun in vierter und fünfter Auflage vorliegenden Buche die Technische Statik in bewußter Beschränkung auf die Mechanik starrer Körper und deren Anwendung auf die grundlegenden Fragen der Baustatik. In diesem engeren Rahmen werden allerdings die hier in Frage kommenden Probleme in einer didaktisch hervorragenden und erprobten Weise behandelt, so daß das Buch den im Untertitel betonten Zweck der Einführung ins technische Denken vollauf erreicht. — Im einzelnen geschieht dies durch zahlreiche, klar herausgearbeitete Beispiele, wobei zugleich auch die Aufmerksamkeit des Lesers auf Zweck und Wesen technischer Bauwerke hingelenkt und so sein Gefühl für Kräftespiel und Formgebung vorbereitet wird. Auch wird die Anschauung durch Einflußlinien für Reaktionen und Beanspruchungen bei beweglichen Lasten oder durch Betrachtungen über die verschiedenen Arten von Stabverbindungen und Gelenkträgern sehr unterstützt. Methodisch wertvoll ist auch der konsequente Hinweis auf die großen Vereinfachungen, die sich bei symmetrischen Bauwerken ergeben und die auch oftmals durch Sonderverfahren statt der allgemeinen Methoden erzielt werden können. Das Buch zerfällt in zwei große Hauptabschnitte, von denen der erste den ebenen, der letzte den räumlichen Kräftegruppen und Fachwerken gewidmet ist. Vor allem

im zweiten Hauptabschnitte bieten die Verff. wesentlich Neues, insbesondere auch hinsichtlich der „Gemischtbauweise“, und zeigen eindrucksvoll, wie das Verfahren der zugeordneten ebenen Abbildung [das auch bei Fragen der räumlichen graphischen Dynamik seine große Verwendbarkeit bereits erweisen konnte; man vgl. z. B. K. Federhofer, Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems, Wien 1928] und die „duale Kräfteabbildung“ bei beliebig zerstreuten räumlichen Kräften wesentliche Vorteile bieten. Vielleicht ließe sich bei einer Neuauflage die Verwertbarkeit des Seilpolygons zur Schwerpunktermittlung zeigen und auch das Wesentliche über das Nullsystem und die Theorie der Dynamen ohne Sprengung des methodischen Gesamtaufbaues des Werkes vorteilhaft einfügen. *Karl Karas* (Darmstadt).

Perucca, E. e L. A. Radicati: Sistemi isolati, leggi di forze elementari, principio di azione e reazione. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 4, 643—666 (1948).

Verff. setzen einige kritische Betrachtungen über das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung auseinander. Dieses Prinzip gilt, in der gewöhnlichen Formulierung der Mechanik, zunächst in einem System, das in elementare Teilchen unterteilt werden kann, so daß jedes Paar von ihnen ein isoliertes System bilden kann; ferner muß die Wirkung eines Teilchens auf ein anderes symmetrischen Charakter haben oder, besser, sich auf eine einzige Kraft reduzieren. Der allgemeinere Ausdruck dieses Prinzips ist der folgende: Die Gesamtheit der Kräfte, die zwischen zwei elementaren Teilchen, die, zusammengefaßt, ein isoliertes System bilden können, wirken, ist im Gleichgewicht. *Graffi* (Bologna).

Kasner, Edward and John de Cicco: Generalization of Appell's transformation. J. Math. Physics, Massachusetts 27, 262—269 (1949).

Bezeichnet man als isotrope Kraftfelder solche, deren Kraftvektor im Punkte $P(x, y)$ nur von diesem Punkte, nicht aber von der Richtung $p = dy/dx$ in P abhängt, und als anisotrope Kraftfelder solche, bei denen eine Abhängigkeit von der Richtung besteht, so hat P. Appell [Amer. J. Math. 12, 103—114 (1889)] gezeigt, daß isotrope Felder und ihre Kraftlinien bei der achthgliedrigen ebenen Kollineationsgruppe in ebensolche Figuren transformiert werden, wobei die Transformation der Zeit t außer von der betreffenden Kollineation nur von einer willkürlichen Konstanten abhängt. In der vorliegenden Arbeit wird in Verallgemeinerung dieser Ergebnisse von Appell gezeigt, daß die in Rede stehenden Transformationen bei anisotropen Kraftfeldern identisch sind mit jenen der gemischten Gruppe der Kollineationen und Korrelationen der Ebene, wobei die Transformation der Zeit t im Falle der Kollineationen nur abhängt von der jeweiligen Kollineation und einer willkürlichen Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen, im Falle der Korrelation aber nicht nur von der Korrelation und einer ebensolchen Funktion, sondern auch noch von dem besonderen anisotropen Felde selbst. *K. Strubecker*.

Aminov, M. S.: On the equation of disturbed motion of a mechanical system. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 377—378 u. engl. Zusammenfassg. 378 (1947) [Russisch].

L'A. généralise ici un résultat de N. E. Joukowsky relatif à un système dynamique holonome à deux degrés de liberté. — Il est bien connu que les mouvements d'un système holonome à n degrés de liberté peuvent être interprétés comme les géodésiques d'une variété riemannienne (la constante h de l'énergie étant fixée à l'avance). Si l'on porte son attention sur une géodésique bien déterminée, appelons-la non perturbée, on peut se proposer d'étudier l'allure d'une géodésique infiniment voisine qui s'obtient en variant infiniment peu les conditions initiales qui ont engendré la géodésique non perturbée. Nommons-la géodésique perturbée. On peut créer une correspondance entre les deux géodésiques de sorte que dans les points correspondants le système ait la même action. — Si l'on désigne par p^α ($\alpha = 1, \dots, n$) les variations des coordonnées q^α du système dans le passage de la géodésique non perturbée à la géodésique perturbée et si l'on admet que la variation soit conservative, c'est-à-dire si h ne change pas, les équations différentielles

de la géodésique perturbée sont

$$(1) \quad \frac{d^2 p^k}{ds^2} + 2 \Gamma_{\alpha\beta}^k \frac{dq^\alpha}{ds} \frac{dp^\beta}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^k}{\partial q^\gamma} \frac{dq^\alpha}{ds} \frac{dq^\beta}{ds} p^\gamma = 0$$

dont les symboles sont bien connus. Maintenant, l'A. indique un système particulier de coordonnées tel que ces équations deviennent extrêmement simples. Elles se réduisent à la forme

$$(2) \quad \frac{d^2 p^k}{ds^2} = 0$$

dans les conditions suivantes: Le long de la géodésique non perturbée nous choisissons les coordonnées orthogonales de Fermi. Si O est l'origine de cette géodésique nous dirigeons le premier vecteur du système de coordonnées le long de la géodésique et les autres vecteurs le long des géodésiques orthogonales deux à deux et aussi à la géodésique non perturbée. Dans un autre point A de cette géodésique nous dirigeons le premier vecteur le long de la géodésique même et les autres vecteurs nous déduisons par déplacement parallèle de Levi-Civita des correspondants issus de O . Dans les autres points de la variété, on introduit un système géodésique dont le lieu de toutes les géodésiques orthogonales en O à la géodésique non perturbée est une hypersurface fondamentale. — Les équations (2) ainsi obtenues deviennent

$$\frac{d^2 r^k}{ds^2} + \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} R_{1k, 1k} r^k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

si l'on pose $r^k = p^k \sqrt{g_{kk}}$ ($R_{1k, 1k}$ sont les composantes du tenseur de courbure). On peut démontrer aussi que si la variation de l'énergie totale n'est pas nulle, les équations différentielles de la géodésique perturbée sont

$$\frac{d^2 r^k}{ds^2} + \frac{1}{g_{kk}} R_{1k, 1k} r^k + \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \left(2 \frac{\partial g_{k1}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{kk}}{\partial q^k} \right) \Delta h = 0.$$

Dans ce cas il faut entendre par points correspondants A, A^* des deux géodésiques deux points tels que AA^* soit orthogonal à la géodésique non perturbée.

G. Lampariello (Messine).

Castoldi, L.: Il principio di Hamilton per sistemi dinamici a vincoli anolonomi generali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 329—333 (1947).

Un système dynamique ayant un nombre fini n de degrés de liberté soit assujetti à des liaisons non holonomes de la forme $f_r(q_h, \dot{q}_h, t) = 0$ ($r = 1, \dots, l$). On peut appeler déplacement virtuel du système, compatible avec ces liaisons, tout déplacement δq_h tel que

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h = 0 \quad (r = 1, \dots, l).$$

Il est aisé de voir qu'en général, une suite continue de déplacements virtuels à partir d'une trajectoire du système ne peut pas être conçue comme une trajectoire, c'est pourquoi l'auteur propose de la nommer pseudotrajectoire variée. — Le principe d'Hamilton est alors valable sous la forme générale bien connue

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \sum_{h=1}^n Q_h \delta q_h) dt = 0$$

pour toutes les pseudotrajectoires variées qui ont les mêmes extrêmes d'un arc arbitraire de trajectoire naturelle.

G. Lampariello (Messine).

Donder, Th. de: Nouveau principe variationnel de la dynamique des solides à liaisons non holonomes de roulement. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. s. 34, 701—702 (1948).

Kurze Mitteilung der Formulierung eines Variationsprinzips für die Rollbewegung eines starren Körpers auf einer Ebene mit Benutzung der Symbolik der

Riemannschen Geometrie. Die nähere Ausführung wird in einer Arbeit von P. Melchior gegeben (dies. Zbl. 31, 318), in der auch bewiesen wird, daß die erhaltenen Gleichungen mit den von P. Appell gegebenen identisch sind.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Grioli, G.: *Precessioni regolari di un solido pesante asimmetrico*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 4, 420—423 (1948).

Verf. beweist die Existenz von ∞^2 regulären Präzessionen für einen Sonderfall des schweren unsymmetrischen Körpers ($A \neq B \neq C$), der in einem reibungslosen Gelenk O gelagert ist. Dieser Sonderfall tritt unter den folgenden Annahmen ein: Es sei f eine der beiden Geraden, die auf einem Kreisschnitt des Trägheitsellipsoids E für den Schwerpunkt des Körpers senkrecht stehen, n die Normale im Schnittpunkt Q von f mit E und $\kappa = \angle(f, n)$. Das feste Gelenk O liege auf der Geraden f . Für jede der ∞^2 möglichen Präzessionsbewegungen ist f die Drehachse, die Präzessionsachse bildet mit der Lotrechten den Winkel κ und ist zu f orthogonal, und die Periode der Präzession ist gleich der Eigendrehung des Körpers. In der ausführlichen Darstellung, die in dies. Zbl. 31, 38 besprochen ist, wird ferner bewiesen, daß die so gekennzeichneten die einzig möglichen Präzessionen dieser Art sind.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Carathéodory, C.: *Über die Integration der Differentialgleichungen der Kepler-schen Planetenbewegung*. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1945/46, 57—76 (1947).

In einer Note, die vor einigen Jahren in der schwer zugänglichen Rev. math. Un. interbalkanique 3 (1940) erschien, hatte Verf. gezeigt, daß es für die Integration der Differentialgleichungen des Zweikörperproblems vorteilhaft ist, die benötigten Hilfsgrößen, welche bei einer orthogonalen Transformation der Raumkoordinaten invariant sind, systematisch einzuführen. Ohne erst die Ergebnisse aus der Theorie des ebenen Zweikörperproblems voraussetzen zu müssen, gestattet diese Methode, sämtliche Formeln von Anfang an für das räumliche Problem in Ansatz zu bringen und alle Daten der Bahnkurven zu errechnen. Die vorliegende Abhandlung enthält eine teils vereinfachte, teils vervollständigte Darstellung dieser früheren Ergebnisse. — Die x_i seien mindestens zweimal nach der Zeit $t \geq 0$ stetig differenzierbare kartesische Punktkoordinaten eines n -dimensionalen Raumes; in diesem sind die Größen

$$(1) \quad r^2 = x_i x_i, \quad s^2 = \dot{x}_i \dot{x}_i, \quad w = x_i \ddot{x}_i \quad (\dot{x}_i = dx_i/dt)$$

bei orthogonalen Transformationen, welche den Nullpunkt fest lassen, invariant. Unter Zugrundelegung eines Newtonschen Kräftepotentials lauten die Bewegungsgleichungen

$$(2) \quad \ddot{x}_i = -f x_i r^{-3} \quad (i = 1, \dots, n),$$

für welche allein durch elementare Rechnungen — und ohne Benutzung von Existenzsätzen aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen vorauszusetzen — nachgewiesen wird, daß zu beliebig vorgegebenen Anfangswerten

$$x_i(0) = a_i, \quad \dot{x}_i(0) = b_i \quad \text{mit} \quad a_i a_i > 0$$

genau eine Lösung vorhanden ist. Unter Verwendung von (2) folgt nämlich durch Differentiation aus (1) das System

$$s \dot{s} - \dot{w} = 0, \quad \dot{w} x_i - w \dot{x}_i = 0, \quad x_i \ddot{x}_j - x_j \ddot{x}_i = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

dessen erste Integration

$$\frac{1}{2} s^2 - \dot{w} = h, \quad \dot{w} x_i - w \dot{x}_i = F_i, \quad x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i = A_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

ergibt. Für $t = 0$ können r , s und w als Funktionen der a_i und b_i ausgedrückt werden, ebenso \dot{w} wegen $\dot{w} = s^2 - f r^{-1}$; daher sind die Integrationskonstanten h , F_i und A_{ij} bekannte Funktionen der Anfangswerte, und schließlich \dot{w} vermöge $\dot{w} = f r^{-1} - 2h$ und s vermöge des Energiesatzes $\frac{1}{2} s^2 - f r^{-1} = -h$ in ihrer Abhängigkeit von r bestimmt. — F sei die Länge des Vektors (F_i) . Für den speziellen Fall $F = 0$, der dann und nur dann eintritt, wenn simultan die Gleichungen $a_i b_i = 0$ und $(a_i a_i)(b_j b_j) = f^2$ bestehen, ist die Bahnkurve kreisförmig. Für den allgemeinen Fall $F > 0$ wird die Länge G eines durch $F G_i = A_{ij} F_j$ definierten Vektors (G_i) als weitere Invariante zu Hilfe genommen. Ist $G \neq 0$, so sind die Vektoren (F_i) und (G_i) zueinander orthogonal. Für $G = 0$ folgt aus $2hG^2 = f^2 - F^2$, daß $F = f$ ist und h beliebig gewählt werden kann; für $G > 0$ hingegen ist $-\infty < 2h < f^2 G^{-2}$. Als Folge von $F^2 x_i = (r^2 \dot{w} - w^2) F_i + w F G_i$ ist die Bahn auf einer Halbgeraden oder in einer Ebene durch den Koordinatenursprung gelegen. Ersteres tritt ein für $G = 0$ (dann wird $b_i = \lambda a_i$ mit $\lambda = \dot{r} r^{-1}$), letzteres für $G > 0$. Nach passender Drehung des Bezugssystems läßt sich $F = \delta_{1j} F_j$ und $G = \delta_{2j} G_j$ erreichen; mit $x_1 = x$ und $x_2 = y$ lautet dann die Bahngleichung $Fx = G^2 - fr$,

$Fy = Gw$ oder $f^2(x^2 + y^2) = (G^2 - Fx)^2$; ihr Hodograph ist ein Kreis vom Radius fG^{-1} um den Mittelpunkt $(0, -FG^{-1})$. G ist die Flächenkonstante, $G^2(f + F)^{-1}$ der Perihelabstand vom Anziehungszentrum. Die Bahnkurven sind: für $h = 0$ Parabeln, für $0 < h < f^2(2G^2)^{-1}$ (und folglich $F < f$) Keplersche Ellipsen und schließlich für $h < 0$ (und folglich $F > f$) Hyperbeln. Explizite Formeln für diese Bahnen, Bahngeschwindigkeiten und Durchlaufungszeiten als Funktionen von F und G werden angegeben. — Die Existenz der Lösungen wird mit Hilfe der Umkehr der ursprünglichen Fragestellung erschlossen, indem Verf. beweist, daß es möglich ist, zu $2n + 1$ vorgelegten Konstanten F_i , G_i und h_i , für welche $F_i F_i > 0$, $F_i G_i = 0$, $2h_i G_i^2 = f^2 - F_i^2 < f^2$ sei, zwei nicht konstante Funktionen $r(t)$ und $w(t)$ derart zu bestimmen, daß die Differentialgleichungen $\dot{w} = fr^{-1} - 2h$, $G^2 = (r^2 \dot{w} - w^2) + fr$ bestehen und die durch $F^2 x_i = (G^2 - fr) F_i + w F G_i$ definierten $x_i(t)$ sämtlichen eingangs genannten Bedingungen genügen. Die Eindeutigkeit dieser Lösungen folgt dann zwangsläufig aus den expliziten Rechnungen des Verf.

H. Bilharz (Freiburg i. Br.).

Elastizität. Plastizität:

Picone, M.: Esistenza e calcolo della soluzione di un certo problema al contorno per il sistema di equazioni dell'elasticità. Atti. Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 427—435 (1947).

Le système des équations de l'équilibre élastique d'un corps homogène et isotrope peut être transformé de façon que les fonctions inconnues soient les efforts tangentiels et les composantes p, q, r de la rotation. — L'A. démontre que le calcul des p, q, r dépend de la résolution de quelques problèmes de Dirichlet à trois et à deux variables, après quoi on peut poursuivre la détermination des efforts tangentiels et des composantes u, v, w de la déformation toujours en résolvant un certain nombre de problèmes de Dirichlet. — Quelques remarques sont adressées au cas où il existe un potentiel des forces extérieures ou les composantes des forces sont des polynômes des variables x, y, z . Tous les éléments qui interviennent dans la discussion sont supposés analytiques.

G. Lampariello (Messine).

Picone, Mauro: Esistenza e calcolo della soluzione di un certo problema al contorno per il sistema di equazioni dell'elasticità bidimensionale. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 4—6 (1948).

Dans cette Note, l'A. a fixé les résultats qui s'obtiennent lorsqu'on applique à la théorie de l'élasticité dans le plan la méthode d'intégration des équations de l'équilibre pour les corps isotropes et homogènes qu'il a proposé dans un travail des Atti Accad. naz. Lincei (cfr. le rapport précédent). La déformation d'une couche élastique simplement connexe est déterminée par la donnée de la rotation et de l'effort tangentiel le long du contour, les forces étant connues.

G. Lampariello.

Truesdell, C.: On Sokolovsky's „momentless shells“. Trans. Amer. math. Soc. 61, 128—133 (1947).

Dans la théorie des couches élastiques, V. V. Sokolovsky avait signalé des surfaces de révolution qui permettent de ramener la recherche des efforts en absence de charges à des fonctions hypergéométriques. — Dans cette note l'A. indique une généralisation des résultats de Sokolovsky qu'il a obtenu avec la collaboration de Nemenyi. — Si l'on représente la courbe méridienne par une équation de la forme $r = f(z)$, alors les coefficients de Fourier des efforts peuvent être exprimés en termes de fonctions qui satisfont à une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} + (n^2 - 1) \frac{f''(z)}{f(z)} \Phi = 0.$$

Une des familles de surfaces de Sokolovsky est relative à la fonction $f = kz^{\frac{1}{2}}$. Les deux autres familles du même auteur sont définies par les formules

$$f = a \sin^c \Phi, \quad z = -ca \int \sin^c \Phi \, d\Phi;$$

$$f = a \sec^c \Phi, \quad z = -ca \int \sec^c \Phi \tan^2 \Phi \, d\Phi.$$

Or, Nemenyi et l'A. transforment l'équation ci-dessus en posant $z = z(f)$. Cn

obtient l'équation

$$\frac{z'(f)}{z''(f)} \frac{d^2 \Phi}{df^2} - \frac{d\Phi}{df} + \frac{1-n^2}{f} \Phi = 0$$

et on voit que si l'on pose

$$f = a \sin^p \xi; \quad z = -pb \int \sin^p \xi \tan^q \xi d\xi$$

on a l'équation

$$\frac{pf}{q+1} \left[1 - \left(\frac{f}{a} \right)^{2/p} \right] \frac{d^2 \Phi}{df^2} - \frac{d\Phi}{df} + \frac{1-n^2}{f} \Phi = 0$$

dont l'intégrale générale est représentable par les fonctions hypergéométriques. — Les cas de Sokolovsky s'en déduisent en particulierisant les valeurs de p et i . — Enfin on peut démontrer que les résultats relatifs aux surfaces $r = f(z)$ sont aussi valables pour les surfaces

$$r = f\left(A + B \int \frac{dz}{f^2}\right).$$

On voit donc que les surfaces définies par les formules

$$f = a \sin^p \xi (A + B \int \csc^p \xi \tan^q \xi d\xi), \quad z = -pb \int \sin^p \xi \tan^q \xi d\xi$$

rentrent dans la catégorie envisagée. — Les cas particuliers $p = 1, q = 0; A = 0, p = 2, q = 0$ sont intéressants. L'A. indique des autres cas où la recherche peut être conduite en terme de fonctions déjà connues. *G. Lampariello* (Messine).

Krall, G. e D. Caligo: Multiplicatore critico λ_{cr} di una distribuzione di carico su una volta autoportante. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 4, 15—21 (1948).

Dans une Note ayant le même titre insérée dans les Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur, VIII. s. 1, 1281 (1946), l'A. a exposé les résultats principaux de ses études sur la stabilité des voûtes autoportantes. Le calcul des multiplicateurs critiques qui s'identifient avec l'extremum d'un rapport de deux fonctionnels est particulièrement pénible. On le développe ici dans le cas d'une voûte dont la base est demicirculaire ou cycloïdique. — Les résultats numériques sont rassemblés dans une table qui a été dressée avec le concours de l'Istituto per le applicazioni del Calcolo (Consiglio nazionale delle ricerche). *G. Lampariello*.

● **Föppl, Ludwig: Die strenge Lösung für die rollende Reibung.** München: Leibniz Verlag (bisher R. Oldenbourg Verlag) 1947. 42 S. u. 13 Bilder.

Verf. sucht eine strenge Theorie der rollenden Reibung zwischen Rad und Schiene, die aus gleichem Material vorausgesetzt werden, unter der Voraussetzung eines rein elastischen Rollvorganges, also unter Ausschluß plastischer Verformungen, jedoch mit Berücksichtigung einer zwischen Rad und Schiene übertragenen Schubkraft und damit eines Drehmomentes zu entwickeln. — Zunächst zeigt er mittels neuer von ihm für diesen Zweck berechneter Integralformeln, daß ein Haften längs der ganzen Berührungsfläche deshalb nicht möglich ist, weil dann die Spannungen an der Ablaufseite über alle Grenzen wachsen würden. Im anderen Grenzfall vollkommener Schlüpfens, den Verf. bereits früher [„Beanspruchung von Schiene und Rad beim Anfahren und Bremsen“, Forsch. Gebiete Ingenieur-Wes. 7 (1936)] behandelt hatte, ergibt sich (was als Kontrolle gewertet werden muß) die Hertzsche Druckverteilung. — Dem allgemeinen Fall und seinen Grenzbedingungen paßt sich Verf. im Sinne O. Reynolds' [On rolling friction, Philos. Trans. R. Soc. London A (1875)] dadurch an, daß er das ganze Berührungsgebiet in ein vorderes Haft- und hinteres Gleitgebiet aufspaltet und so die „Hauptgleichung“ der ganzen Theorie gewinnt, die für ein gegebenes Moment M , gegebene Normalkraft N und Schubspannung T ein bestimmtes Verhältnis α des Schlüpfanteils zum ganzen Berührungsgebiet ergibt. Für $T \neq 0$ ergibt sich $\alpha = 0,64$ als ausgezeichneter Wert, für den seine Theorie ausgezeichnete Übereinstimmung mit Versuchen von G. Sachs [Versuche über

die Reibung fester Körper, Z. angew. Math. Mech. 4, 1—32 (1924)] ergibt. Zur übersichtlichen Darstellung der Spannungszustände in Rad und Schiene bedient sich Verf. im Sinne einer seiner früheren Arbeiten [S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1941, 111—129; dies. Zbl. 26, 278] mit Erfolg der komplexen Schreibweise. Ein spezieller Spannungszustand, wie er sich bei tief sitzenden Bremsklötzen ergibt, sowie Rollmoment und Rollarbeit werden angegeben und die Lösung des Falles verschiedener Elastizitätsmoduln für Rad und Schiene mittels vorliegender Theorie in Aussicht gestellt. — Man darf dem Verf., der hier erstmalig eine geschlossene und befriedigende Theorie der rollenden Reibung gegeben hat, in der Erwartung beipflichten, daß dieses bisher so vernachlässigte Teilgebiet sich nunmehr als neues Kapitel der theoretischen Mechanik einbauen lassen werde.

Karl Karas (Darmstadt.)

Cattaneo, Carlo: Teoria del contatto elastico in seconda approssimazione. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6, 504—512 (1947).

Während in der Hertzschen Theorie der Berührung zweier elastischer Körper angenommen wird, daß die beiden Körper vor der Verformung die Form von Flächen zweiter Ordnung haben, werden diese hier von vierter Ordnung angenommen und gezeigt, daß sich das Problem auch unter dieser allgemeineren Annahme in geschlossenen Formeln lösen läßt. Als Hilfsmittel werden die elastischen Potentiale verwendet, die von Boussinesq in die Theorie eingeführt wurden. Th. Pöschl.

Sneddon, Ian N.: Boussinesq's problem for a rigid cone. Proc. Cambridge philos. Soc. 44, 492—507 (1948).

Das Problem der Ermittlung der Spannungsverteilung beim Eindringen eines starren Kegels in einen mit elastischem oder plastischem Material erfüllten Halbraum ist u. a. für die Bodenmechanik beim Einrammen eines starren Stempels mit kegelförmiger Spitze, in der Kegelhärteprüfung u. dgl. von Bedeutung. Bisher ist nur das entsprechende ebene Problem behandelt worden. Hier wird eine vollständige Lösung des elastischen räumlichen Problems gegeben; die Gleichungen werden in Zylinderkoordinaten angesetzt, und ihre Lösungen durch Integrale dargestellt, die sich aus den in der Theorie der Besselschen Funktionen verwendeten zusammensetzen. Für das Poissonsche Verhältnis wird der Wert 0,25 gewählt, der weichem Stahl und granuliertem Bodenmaterial entspricht. Die für die Komponenten des Spannungstensors erhaltenen Werte werden in Zahlentafeln und Kurven vollständig wiedergegeben. Ausführliches Schriftenverzeichnis. Th. Pöschl (Karlsruhe).

Krall, G.: Asismica delle torri. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 1—11 (1947).

La discussion que L'A. présente dans cette note est une contribution au problème technique de la construction asismique d'une tour. — Le schéma mathématique du problème se réduit à un système vibratoire à un degré de liberté dont on considère les oscillations forcées provoquées par une perturbation extérieure d'origine tellurique. — Si l'on désigne par s la coordonnée du système et par $s_0(t)$ la force extérieure, c'est le rapport entre l'accélération induite \ddot{s} et l'accélération sismique qui doit être borné. — M. Danusso [cfr. Rend. Sem. mat. fisico Milano 2, 175—199 (1928)] avait déjà considéré le cas où l'on suppose $s_0 = r_0 \sin \nu t$. — L'A. analyse aussi les deux cas $s_0 = r_0 e^{-kt} \sin \nu t$, $s_0 = r_0 \beta t e^{-kt} \sin \nu t$ et enfin il trouve qu'on peut réaliser une neutralisation des vibrations par des cordes attachées à la tour. Dans ce cas à la force extérieure tellurique on doit superposer un terme proportionnel à $\partial w / \partial x$ pour $x = 0$, w étant le déplacement qui caractérise les vibrations transversales de la corde le long de laquelle la propagation des ondes est entretenue par un mouvement $A e^{i\nu t}$ de l'extrême $x = 0$ fixé d'avance. Il s'agit alors d'étudier l'allure du rapport à \ddot{s}_0 de \ddot{s} en supposant que

$$\ddot{s} + \sigma^2 s + 2h\dot{s} = \sigma^2 s_0(t) + \lambda \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0}, \quad V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - x \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

les coefficients ayant une signification qu'il est superflu de rappeler. — L'A. annonce qu'on pourra appliquer avec succès les résultats de cette analyse à la construction de câbles aériens pour le transport d'énergie électrique au dessus du détroit de Messine. G. Lampariello.

Klotter, K.: Analyse der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Torsions-eigenschwingungen von Maschinenwellen. *Ingenieur-Arch.* 17, 1—61 (1949).

Nach einer allgemeinen Kennzeichnung des Problems und der Voraussetzungen und Annahmen, die für eine mathematische Formulierung und Lösung eingeführt wurden, werden die bisher entwickelten rechnerischen und zeichnerischen Verfahren zur Bestimmung der Eigenfrequenzen in großer Vollständigkeit in ihren wesentlichen Gedankengängen dargelegt, wobei bei fast allen die zweckmäßigste Anordnung und Durchführung und die erforderlichen Zwischenrechnungen und Konstruktionen angegeben sind. Besonders hervorzuheben ist die kritische Durcharbeitung und Abwägung der Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren, die für den praktischen Rechner und den Konstrukteur von Vorteil sind und die zusammen mit den eingeschalteten vergleichenden Tabellen die Übersichtlichkeit und Verwendbarkeit der gebotenen Entwicklungen ergänzen. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Krall, G.: *Dinamica ed aerodinamica dei fili. Premesse. Vibrazioni visibili. I.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 11—17 (1947).

Il s'agit ici d'évaluer l'entité des perturbations dynamiques d'un câble aérien pour empêcher que sous l'action du vent ou à cause de la chute ou de la formation imprévue de glace deux câbles utilisés pour le transport d'énergie électrique s'approchent et provoquent le court-circuit. — Le schéma mathématique de la recherche est l'équation des ondes à une dimension non homogène avec terme dissipatif.

G. Lampariello (Messine).

Krall, G.: *Dinamica ed aerodinamica dei fili. Vibrazioni acustiche. II.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 17—22 (1947).

L'A. étudie ici les vibrations d'une corde ou d'une tige induites par une action invariable du vent, en utilisant la théorie classique des tourbillons de Bénard-Kármán. On sait que Krüger et Lauth ont donné une formule remarquable pour calculer la fréquence de la perturbation du fils, étant donnée la vitesse du vent. — En se rattachant à ces recherches l'auteur a pu réaliser un progrès visant à calculer l'entité de la poussée (Auftrieb) de la perturbation. *G. Lampariello*.

Thring, M. W.: Application of dynamic similarity to metal structures with elastic and plastic flow. *Nature, London* 162, 193—194 (1948).

Auf die Frage nach dimensionslosen Kennzahlen für die dynamische Ähnlichkeit beim elastischen und plastischen Fließen von Metallen ergeben sich zwei Möglichkeiten, je nachdem entweder die Massenträgheit ($\rho V/T$) und die Elastizität (E) oder die Elastizität und die Zähigkeit (η) als die maßgebenden Faktoren angesehen werden. Man erhält so $N_1 = \rho L^2/ET^2$ bzw. $N_2 = \eta/ET$, während die statische Kennzahl einfach durch P/EF gegeben ist. Wenn daher z. B. für das Modell und das Original dasselbe Material verwendet wird, so folgt aus N_2 , daß für dynamisch-ähnlich verlaufende Fließvorgänge dieselbe Zeitskala verwendet werden muß.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Hill, R.: A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. R. Soc. London A* 193, 281—297 (1948).

Es wird die Theorie des plastischen Fließens eines anisotropen Metalls nach Überschreitung der Fließgrenze gegeben. Der Typus der Anisotropie wird gemäß der bevorzugten Orientierung der Gleitungen erklärt und hierbei ein Fließgesetz angenommen, das dem Mises-Huberschen Kriterium für isotrope Metalle ähnlich ist, aber sechs Fließspannungen (yield-stresses) als Parameter enthält, die den Zustand der Anisotropie kennzeichnen. Die Beziehungen zwischen den Spannungen und Dehnungs-Änderungen werden mittels des von v. Mises (1928) eingeführten plastischen Potentials ausgedrückt. Die Theorie wird angewendet: 1. auf die Versuche von Körbe und Hoff (1928) über die Reckung dünner Streifen, die aus gewalztem Blech herausgeschnitten werden unter einachsiger Spannung, wobei sich zwei gleichmögliche Reckungsrichtungen ergeben; 2. auf die reine Torsion

eines dünnwandigen Zylinders, wobei mit zunehmender Verdrehung die Anisotropie verstärkt wird. Die Theorie vermag die Änderungen in der Länge des Zylinders und gewisse Faltungerscheinungen beim Tiefziehen von Walzblechen vorauszusagen.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Swida, W.: Die elastisch-plastische Biegung des krummen Stabes. *Ingenieur-Arch.* **16**, 357—372 (1948).

Die Behandlung der elastisch-plastischen Biegung des gekrümmten Stabes wird unter ähnlichen Voraussetzungen durchgeführt, wie sie für gerade Stäbe üblich sind. Es wird angenommen, daß die maximalen Spannungen zunächst in den Fasern der konkaven Oberfläche auftreten, und die Größe des Bereiches ermittelt, in dem Plastizierung eingetreten ist. Wird als Plastizitätsbedingung die v. Mises-Henckysche benützt, so ergeben sich sehr verwickelte, für die Mohrsche jedoch erheblich einfachere Ausdrücke. Für den elastischen Bereich wird die Spannungsverteilung mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion ermittelt. Neben dieser „exakten“ wird auch eine Näherungstheorie entwickelt, bei der die für gekrümmte Stäbe üblichen Näherungsansätze verwendet werden und das Material als idealplastisch angesehen wird. Ausführung und Zahlenbeispiel für den Rechteckquerschnitt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Oldroyd, J. G.: Rectilinear plastic flow of a Bingham solid. III. A more general discussion of steady flow. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **44**, 200—213 (1948).

Weiterführung und Verallgemeinerung früherer Noten desselben Verf. (dies. Zbl. **29**, 327, 328) durch Aufsuchung aller möglichen Geschwindigkeitsverteilungen, wobei es — für einen verschwindenden Druckgradienten — auf die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ankommt, die in den zweiten Ableitungen linear, in den ersten quadratisch ist. Von dieser Gleichung werden Lösungen angegeben und die zugehörigen Randbedingungen nachträglich ermittelt. Die Form der erhaltenen Geschwindigkeitsverteilungen hängt von einem Parameter ab, der die Streckgrenze des Mediums enthält. Bei der Lösung wird von dem Hilfsmittel krummliniger (isometrischer) Koordinaten Gebrauch gemacht.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Oldroyd, J. G.: Rectilinear plastic flow of a Bingham solid. IV. Non steady motion. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **44**, 214—228 (1948).

Das Problem der nicht-stationären geradlinigen Bewegung eines Bingham'schen Mediums hat eine Analogie in der zweidimensionalen Wärmeströmung in einem Medium von veränderlicher Wärmeleitfähigkeit. Dabei entspricht eine Strömungsfläche einer Wärmeleitfläche, die sich so bewegt, daß keine Wärme durch sie hindurchtritt. Für die geradlinige zweidimensionale Bewegung werden exakte Lösungen angegeben, die einem gleichförmigen Druckgradienten und einer gleichförmig beschleunigten ebenen Begrenzung entsprechen. Für axial-symmetrische Strömungen sind die Gleichungen für die Geschwindigkeit eher einer numerischen Auswertung als einer exakten Analysis zugänglich. Im besonderen wird die Geschwindigkeitsverteilung in einem Kreisrohr berechnet, in dem das Medium plötzlich einem Druckgradienten unterworfen wird.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Rivlin, R. S.: A uniqueness theorem in the theory of highly-elastic materials. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **44**, 595—597 (1948).

Für das vom Verf. in einer früheren Note (dies. Zbl. **29**, 326) eingeführte Neo-Hookesche Material wird gezeigt, daß auch für eine Verformungsenergiefunktion

$$W = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2(1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2 + 1/\lambda_3^2 - 3)$$

die Verformung eines Würfels unter der Wirkung von drei Paaren von gleichen und entgegengesetzt gerichteten Normalkräften auf die Seitenflächen eindeutig definiert und stabil ist. Sie stellt eine bessere Näherung dar, als wenn W durch das erste Glied allein gegeben ist. Bei allen Messungen haben sich C_1, C_2 positiv ergeben.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Hydrodynamik:

Richter, W.: Eindimensionale stationäre Gleichdruckströmung in bewegten Systemen. *Ingenieur-Arch.* **16**, 422—445 (1948).

Die im Titel gestellte Aufgabe bezieht sich auf ideale Flüssigkeiten und ist durch die Forderung überall gleichen Druckes charakterisiert. Damit auch die Relativströmung stationär sei, ist im allgemeinen Falle zu fordern, daß das bewegte System eine gleichförmige Schraubung beschreibe. Als wichtige Spezialfälle sind darin die Translation und Rotation des bewegten Systems eingeschlossen. Verf. gewinnt mit den gemachten Voraussetzungen aus der Eulerschen Gleichung dann die folgende allen weiteren Berechnungen zugrunde liegende Hauptgleichung: $\frac{1}{2} \text{grad } c^2 = [u, \text{rot } c] = a$, worin c die Absolut- und u die Führungsgeschwindigkeit bedeuten. Alle weiteren Berechnungen sind dann durch die Forderung $a = \text{konst.}$ gekennzeichnet, die wahrscheinlich praktischen Gegebenheiten entspricht und bedingt, daß $c^2 = 2al + b$ wird, worin l eine variable, dem bewegten System eigene Länge bedeutet. Hiermit gelingt dem Verf. für den Fall der in sich selbst verschobenen Ebene durch geschlossene Integration der sich ergebenden partiellen Differentialgleichungen die explizite Darstellung der Absolut- und Relativbahn (die Absolutbahn ergibt sich als Zykloide, die Relativbahn als Kreis), während für die gleichförmig in sich selbst rotierende Ebene sich elliptische Integrale darbieten. In beiden Fällen entwickelt aber Verf. graphische Lösungsverfahren, die zugleich auch die Hodographen der Absolut- und Relativbewegung ergeben und stets auch dann anwendbar bleiben, wenn die numerische Berechnung zu umständlich wird; sie liefern, wie Verf. zeigen konnte, Ergebnisse, die um weniger als 2% von den strengen Lösungen abweichen. — Auch für Bewegungen auf der in Richtung ihrer Erzeugenden verschobenen allgemeinen Zylinderfläche, ferner für die um ihre Achse rotierende Kreiszyylinder- und Kegelfläche sowie die allgemeine Drehfläche werden die Ergebnisse numerisch, bzw. — unter Benutzung entsprechender konformer Abbildungsverfahren — in der Ebene graphisch ermittelt und in Schaubildern übersichtlich dargestellt. — Da insbesondere die graphischen Verfahren ihre Brauchbarkeit auch für andere Verfügungen über den Vektor a bewahren, können auch allgemeinere Fälle behandelt und so die hier erstmals untersuchten Strömungen praktischen Erfordernissen weitergehend angepaßt werden.

Karl Karas (Darmstadt).

Manarini, Mario: Sulle equazioni della dinamica dei fluidi perfetti. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. s. **3**, 111—114 (1948).

Unter Bezugnahme auf eine Note von H. Pailloux (dies. Zbl. **29**, 330) wird eine universelle Gleichung in Tensorform aufgestellt, die in einer vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit alles enthält, was man für die Transformation der Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit aus der Mechanik und Geometrie benötigt. Diese Gleichung gestattet, das Eulersche Theorem über die Verteilung des Drucks über irgendeine die Flüssigkeit begrenzende Fläche allgemein in Integralform auszusprechen.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Caldonazzo, Bruto: Sui moti liberi di un mezzo continuo. *Ann. Mat. pura appl.*, Bologna, IV. s. **26**, 43—55 (1947).

L'A. s'est proposé dans ce Mémoire d'analyser les mouvements d'un milieu continu sous la condition que l'accélération absolue (c'est-à-dire par rapport à un système galiléen de référence) de chaque point soit nulle. — Il s'ensuit que les points du milieu se meuvent uniformément en ligne droite. Il peut se faire que ces mouvements, appelés libres par l'a., soient stationnaires mais il sont, en général, non stationnaires. Quoi qu'il en soit, il est aisé de voir que l'équation fonctionnelle qui caractérise tous les mouvements libres est

$$(1) \quad \vec{v}(P, t) = \vec{h}(P - \vec{v}t) \quad \text{si} \quad (2) \quad \vec{v} = \vec{h}(P_0)$$

est la fonction qui donne la distribution des vitesses initiales dans le domaine D_0 des points P_0 . Elle est l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{d\vec{v}}{dP} \vec{v} = 0$$

dont le premier membre est l'accélération des points du milieu dans sa forme eulerienne, compte tenu des conditions initiales (2). — U. Cisotti avait déjà considéré [cfr. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., V. s. 19, 305—309 (1909)] le cas stationnaire et avait démontré que les lignes de courant (qui dans ce cas s'identifient avec les trajectoires) forment une congruence rectiligne solénoïdale. — L'A. étudie aussi les cas où l'on a une stationnarité partielle soit de la direction de la vitesse eulerienne soit du module de la même vitesse. Dans ce second cas les lignes de courant appartiennent aux surfaces isotachies (à vitesse constante) qui sont indépendantes du temps. Il s'ensuit évidemment que ces surfaces sont des plans fixes. — Si au surplus on conçoit que le milieu soit le siège d'une distribution matérielle on peut déduire la loi de densité à l'instant t au point de vue eulerien en combinant l'équation caractéristique des mouvements libres avec l'équation de continuité. Il importe de remarquer que si le système est incompressible et homogène, on a l'équation $v^2 \operatorname{div} \vec{u} = \partial v / \partial t$ en désignant par \vec{u} le vecteur unitaire de la vitesse eulerienne. Alors si le mouvement est stationnaire on a $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, mais le caractère solénoïdal du champ des vecteurs \vec{u} subsiste aussi dans le cas que le module de la vitesse soit stationnaire mais alors la congruence n'est pas rectiligne.

G. Lampariello (Messine).

Ray, M.: Flow of a liquid from a reservoir over a plane—boundary-layer theory. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. s. 39, 409—412 (1948).

Eine Flüssigkeit befindet sich in einem Behälter in Ruhe und strömt durch eine weite Öffnung über eine Ebene aus; es ist das Wachsen der Grenzschicht längs der Ebene zu bestimmen. Diese Aufgabe wird als ebenes Grenzschichtenproblem behandelt, wobei ein Reibungsglied von der Form $v \partial^2 u / \partial y^2$ eingeführt und der Druckgradient längs der Ebene gleich Null gesetzt wird. Die Geschwindigkeiten in der Grenzschicht parallel zur Ebene nehmen zuerst rasch, dann langsamer zu, die senkrecht zur Ebene anfänglich langsam, dann linear bis zu ihren Endwerten.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Kahlert, W.: Der Einfluß der Trägheitskräfte bei der hydrodynamischen Schmiermitteltheorie. Ingenieur-Arch. 16, 321—342 (1948).

Die klassische Theorie der Schmiermittelreibung kann bekanntlich im Falle des unendlich breiten Gleitschuhs und ebensolchen Zapfenlagers zu geschlossenen Lösungen für den Druckverlauf, den Schub und den Reibungskoeffizienten, ferner die Druckpunktlage beim Gleitschuh bzw. die Verlagerungskurve beim Zapfenlager nur durch Unterdrückung der als klein erkannten Trägheitsglieder der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen gelangen. Verf. zeigt nun in der vorliegenden Arbeit, daß man auch bei Berücksichtigung der Trägheitsglieder geschlossene Näherungslösungen für alle oben erwähnten Größen dann erhalten kann, wenn man im Sinne der Iterationsverfahren die bekannten Lösungen der trägheitslosen Strömung als erste Näherungen in die Trägheitsglieder der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen einführt, die sich dann integrieren lassen. Die Überlagerung der so gewonnenen Korrekturströmung über die klassischen Lösungen gibt dann ein genaueres Strömungsbild, das in Grenzfällen bis zu 10% von der klassischen Lösung abweichen kann. Hierbei zeigt es sich, daß die Tragfähigkeit und die Reibungsgrößen einschließlich des Reibungskoeffizienten i. a. größer erhalten werden, während Druckpunktlage und Verlagerungskurve keine nennenswerte Beeinflussung erfahren. Interessant ist auch das Ergebnis, daß sich die oben er-

wähnten Einflüsse (mit absolut kleinen Beträgen) auch umkehren können, falls der Gleitschuh sehr schrägt gestellt ist bzw. der Zapfen eine große Exzentrizität aufweist.

Karl Karas (Darmstadt).

Lin, C. C., E. Reissner and H. S. Tsien: On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid. *J. Math. Physics*, Massachusetts 27, 220—231 (1948).

Die unstationäre zweidimensionale Potentialströmung um einen schlanken Körper wird besprochen, und zwar liefert die Arbeit eine systematische Abschätzung der einzelnen Glieder der Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential. Die dabei maßgebenden Parameter sind 1. δ , die größere der beiden Zahlen: Dickenverhältnis des Körpers und Verhältnis der größten seitlichen Abweichung zur Tiefe des Flügels b. 2. M_∞ , Machzahl im Unendlichen, bezogen auf die feste Geschwindigkeit U_1 . 3. $1/k$, die charakteristische Zeitperiode für durchgängige Bewegungen; z. B. für periodische Schwingungen ist k das Verhältnis $\omega b/U_1$, ω die Winkelfrequenz. U_1 ist dabei entweder die kritische Geschwindigkeit c_* oder die freie Stromgeschwindigkeit. — Die Resultate können folgendermaßen zusammengefaßt werden: A. M_∞ nicht groß. Wenn $|1 - M_\infty| = O(\delta^2)$ und $k = O(\delta^2)$, dann handelt es sich um das Übergangsgebiet zwischen Unterschall und Überschall, und das Problem ist nichtlinear. Ist $k = o(\delta^2)$, so ist das Problem quasistationär. — Wenn eine oder beide Bedingungen nicht gelten, so tritt die allgemeine linearisierte Theorie in Kraft, sogar, wenn $M_\infty \rightarrow 1$. In solchen Fällen ist für $k = o(|1 - M_\infty|)$ das Problem quasistationär. B. $M_\infty \gg 1$. Im Falle $M_\infty \ll 1/\delta$ und $1/k\delta$ gilt die allgemeine linearisierte Theorie. — Falls eine dieser Bedingungen nicht gilt, sind die Gleichungen nichtlinear. Ist dies die erstgenannte Bedingung, so handelt es sich um Überschall. Auch sind dann die Druckänderungen nicht mehr klein.

Schmeidler (Berlin).

Burgers, J. M.: Damped oscillations of a spherical mass of an elastic fluid. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 51, 1211—1221 (1948).

Um die an Seifenlösungen verschiedener Konzentration von Bungenberg de Jong beobachteten Schwingungserscheinungen zu erklären, wird die Lambsche Theorie der Schwingungen einer zähen bzw. elastischen Flüssigkeitskugel vereinfacht abgeleitet. Für das logarithmische Dekrement der Rotationsschwingung ergibt sich aus der Untersuchung der Bewegung in konzentrischen Kugelschalen je nach der Dämpfungsursache (Zähigkeitswirkung, Relaxation, Gleiten) eine verschiedenartige Abhängigkeit vom Radius. Das Dämpfungsverhalten der Meridian- und Quadrantschwingungen, die als achsialsymmetrische Bewegungen in der Meridianebene verlaufen, ist analog; nur sind die Schwingungszeiten kleiner.

Pretsch (Göttingen).

Lapwood, E. R.: Convection of a fluid in a porous medium. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 44, 508—521 (1948).

Verf. untersucht das Aufhören der Stabilität und die Möglichkeit des Eintrittes einer Konvektionsströmung in einer horizontalen Flüssigkeitsschicht mit vertikalem Temperaturgradienten, die ein poröses Medium durchströmt, das dem Darcyschen Gesetz gehorcht. — Er geht aus von einem Gleichgewichtszustand mit linear mit der Höhe veränderlichem Druck und ebensolcher Temperatur, dem er eine Störung mit so kleinen Größen überlagert, daß nur ihre linearen Glieder beachtet werden müssen. Dann ergibt sich für die Temperatur θ oder die Vertikalströmung w eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung, die — mit geringer Änderung einer Konstanten β — auch für kompressible Flüssigkeiten gültig bleibt. — Um nun die Grenze der Stabilität zu erhalten, führt Verf. im Sinne von Rayleigh für die Temperatur eine einfache Ortsfunktion mit exponentiellem Zeitfaktor ein, für welchen das Verschwinden des Realteiles des Exponenten in bekannter Weise das Stabilitätskriterium liefert, das nun nach Pellew und Southwell [*Proc. R. Soc.*

London A 176, 312—343 (1940); dies. Zbl. 27, 27] die Ausgangsdifferentialgleichung infolge des Verschwindens der zeitlichen Ableitungen entsprechend vereinfacht. Die 4 Integrationskonstanten der noch verbleibenden Ortsfunktion als Lösung jener vereinfachten Differentialgleichung werden durch die Randbedingungen, welche an den Schichtgrenzen für Druck, Vertikalgeschwindigkeit und Temperatur jeweils vorgeschrieben sind, bestimmt, wobei das Verschwinden der Determinante der 4 homogenen linearen Gleichungen dann eine Gleichung für das Gefälle des (vertikalen) Temperaturverlaufs in der Stabilitätsgrenze liefert. Verf. zeigt dies an 3 komplizierteren Fällen und stellt Isothermen und Stromlinien in Schaubildern übersichtlich dar, wobei er auch geophysikalische Daten zugrunde legt. Zum Schlusse bemerkt er, daß seine Methode eine i. a. geringe Korrektur dann wird erfahren müssen, wenn die dem Darcyschen Gesetze gehorchende Schicht von einem Bohrloch durchstoßen wird.

Karl Karas (Darmstadt).

Atomphysik.

Quantenmechanik:

Titchmarsh, E. C.: Analysis for physicists. J. London math. Soc. 23, 69—79 (1948).

Après avoir fait des réflexions critiques sur la nature de la mathématique employée par les physiciens, l'a. pense que l'analyste qui se propose de récrire quelques travaux de physique dans le style de Landau trouverait beaucoup de matière et cela produirait des progrès remarquables en mathématique pure. — Il s'est occupé ici d'éclaircir la résolution de deux problèmes de choc qui se trouvent traités dans la „Quantum mechanics“ de Dirac. — Il s'agit de trouver une solution de l'équation

$$(1) \quad (\nabla^2 + k^2) G(x, y, z) = F(x, y, z)$$

où k est une constante donnée, F est une fonction donnée, telle que pour des grandes valeurs de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ elle implique e^{ikr} et non e^{-ikr} . — Il s'agit encore de trouver une solution de l'équation

$$(2) \quad \{W' - c\sqrt{m^2 c^2 - \hbar^2 \nabla^2}\} G(x, y, z) = F(x, y, z)$$

ayant une structure analogue à la précédente. L'équation (2) implique la racine carrée d'un opérateur différentiel ce qui n'a pas de sens dans l'analyse ordinaire. — Dirac obtient les solutions cherchées moyennant sa fonction δ que l'A. trouve „extremely baffling“. — C'est pourquoi il cherche une justification à la Landau des résultats de Dirac. Il atteint son but en utilisant les transformées à la Fourier; il donne aussi une définition de l'opérateur ci-dessus.

G. Lampariello.

Eisenhart, L. P.: Enumeration of potentials for which one-particle Schroedinger equations are separable. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 74, 87—89 (1948).

Übersichtliche Zusammenstellung aller Koordinatensysteme und aller Funktionen $V(x, y, z)$, für welche die dreidimensionale Schrödingersche Wellengleichung $\Delta\psi + k^2(E - V)\psi = 0$ (k und E sind willkürliche Parameter) separierbar ist.

J. Meixner (Aachen).

Touschek, B.: Zum analytischen Verhalten Schrödingerscher Wellenfunktionen. Z. Physik 125, 293—297 (1949).

Es wird ein einfaches eindimensionales Beispiel für einen Streuvorgang durchgerechnet und gezeigt, daß das unstetige Einsetzen eines Anregungsprozesses mit wachsender Energie mit einem durchaus stetigen Verhalten der Streuamplituden verbunden ist. Das Ergebnis wird in die Sprache der Heisenbergschen S -Matrix übersetzt.

Volz (Erlangen).

Bates, D. R. and Agnete Damgaard: The calculation of the absolute strengths of spectral lines. *Philos. Trans. R. Soc. London, A* **242**, 101—122 (1949).

Bei der Auswertung der Integrale $\int_0^\infty R_1 R_2 r dr$, die man zur Bestimmung von Linienstärken braucht (R_1 und R_2 sind die radialen Eigenfunktionen der beteiligten Zustände), macht man keinen wesentlichen Fehler, wenn man das wirkliche Potential im Atom durch ein Coulombpotential ersetzt. Die Integrale lassen sich dann in Reihenform durch die Quantenzahlen n^* , l der beiden Zustände und die Ladung des Atomrestes ausdrücken. Sie sind für s - p -, p - d - und d - f -Übergänge berechnet und übersichtlich tabuliert. Die Ergebnisse sind mit den nach anderen mühsameren Methoden berechneten Integralen und mit den gemessenen Linienstärken verglichen. *F. Hund (Jena).*

Feshbach, Herman: On Feenberg's perturbation formula. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 74*, 1548—1549 (1948).

Verf. gewinnt nach der Methode sukzessiver Approximationen eine neue Ableitung einiger störungstheoretischer Resultate, welche E. Feenberg angegeben hatte [vgl. E. Feenberg, *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 74*, 206—208 (1948) und ebenda, im Druck]. Es handelt sich um die Bestimmung der Koeffizienten a_m der Gleichungen

$$(E - H_{mm}) a_m = \sum_{m \neq n} H_{mn} a_n.$$

Dabei sind a_m die Amplituden der Entwicklung nach Orthogonalfunktionen für d Eigenwertproblem $H\psi = E\psi$ und H_{mn} die Elemente der Matrix H . *M. Pinl (Köln).*

Hylleraas, Egil A.: Calculation of a perturbing central field of force from the elastic scattering phase shift. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 74*, 48—51 (1948).

Die Streuung in einem Zentralkraftfeld ist bestimmt durch die Phasenverschiebungen η_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) der radialen Wellenfunktionen. Diese η_l sind bestimmt durch das Potential $V(r)$. Verf. entwickelt ein Näherungsverfahren, in dem er umgekehrt aus der Abhängigkeit einer der Funktionen η_l von der Energie der gestreuten Teilchen das Potential bestimmen kann. Man geht dabei aus von einem genäherten Potential, das schrittweise verbessert wird. *B. Kockel.*

Bargmann, V.: Remarks on the determination of a central field of force from the elastic scattering phase shifts. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 75*, 301—305 (1949).

Es wird die Frage untersucht, ob das Feld eines Streuzentrums sich eindeutig aus den Phasenverschiebungen bestimmen läßt, die den Streuwellen der nullten Ordnung (für variablen Anfangsimpuls) zukommen. Die Frage ist zu verneinen. Es werden Beispiele für Potentialfelder angegeben, welche gleiche Phasenverschiebungen und — damit zusammenhängend — gebundene Zustände von gleicher Energie liefern. *Volz (Erlangen).*

Schwinger, Julian: Quantum electrodynamics. I. A covariant formulation. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 74*, 1439—1461 (1948).

Die Vertauschungsrelationen der Feldkomponenten in der Quantenmechanik der Felder beziehen sich in der gewöhnlich angenommenen Form auf einen bestimmten Zeitpunkt, d. h. die Punkte r und r' beispielsweise in der Vertauschungsrelation der Vektorpotentiale

$$(1) \quad \left[A_\mu(r, t), \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_\nu(r', t) \right] = i \hbar c \delta_{\mu\nu} \delta(r - r')$$

liegen auf einer Fläche des x, y, z, t -Raumes, charakterisiert durch $t = \text{const.}$, und beziehen sich insofern auf ein bestimmtes Koordinatensystem. „Die üblichen Vertauschungsrelationen sind wesentlich ein Ausdruck für die kinematische Unabhängigkeit von Feldgrößen an verschiedenen Punkten des Raumes zu einer gegebenen Zeit. Offenbar sollte die eigentlich kovariante Beschreibung dieser all-

gemeinen Eigenschaft sich auf Feldgrößen an zwei Raum-Zeit-Punkten beziehen, die nicht durch Lichtsignale verbunden werden können, d. h. an zwei Punkten auf einer raumartigen Oberfläche“. Verf. verallgemeinert daher z. B. (1) zu

$$(2) \quad \int_{\sigma} \left[A_{\mu}(x), \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} A_{\nu}(x') \right] d\sigma'_{\lambda} = \frac{\hbar c}{i} \delta_{\mu\nu},$$

wobei die $d\sigma_{\lambda}$ die Komponenten eines Vierervektors mit der vierten Komponente $dx_1 dx_2 dx_3 / i$ sind und die Integrale sich über einen beliebigen Bereich einer raumartigen, den Punkt x enthaltenden Oberfläche erstrecken. Die Arbeit befaßt sich ausführlich mit der Unabhängigkeit dieser Integrale von der Form der Oberfläche und weiteren, teilweise sehr tiefliegenden Kompatibilitätsfragen. Ein wesentliches methodisches Hilfsmittel ist die funktionale Ableitung

$$(3) \quad \frac{\delta F[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \lim_{\delta \omega \rightarrow 0} \frac{F[\sigma'] - F[\sigma]}{\delta \omega},$$

wobei $F[\sigma']$, $F[\sigma]$ Integrale wie in (2) sind, die über zwei infinitesimal verschiedene, das Volumen $\delta \omega$ einschließende Flächen erstreckt werden. Sie sind Funktionen von x ; wenn z. B. $F[\sigma]$ das Oberflächenintegral einer Punktfunktion ist:

$$(4) \quad F[\sigma] = \int_{\sigma} F_{\lambda}(x') d\sigma'_{\lambda},$$

so wird

$$(5) \quad \frac{\delta F[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \lim_{\delta \omega \rightarrow 0} \left(\int_{\sigma'} - \int_{\sigma} \right) = \frac{\partial F_{\lambda}(x)}{\partial x_{\lambda}}.$$

Eine grundlegende weitere Umgestaltung des Formalismus wird nötig, weil man im allgemeinen auch Kommutatoren von Feldgrößen braucht, die durch ein zeitartiges Intervall getrennt sind. Zur Konstruktion solcher Kommutatoren müßte man erst die Bewegungsgleichungen mit Randbedingungen auf einer raumartigen Oberfläche lösen. Verf. beschränkt daher die gegenwärtige Formulierung auf Felder ohne Wechselwirkung, d. h. auf kräftefrei bewegte Teilchen und Lichtquanten, und führt die Wechselwirkung ein durch die kovariante Entfaltung einer kanonischen Transformation, entsprechend der zeitlichen Entfaltung einer solchen in Schroedingers bekannter Interpretation der quantenmechanischen Bewegungsgleichungen. Alle Feldgrößen werden dazu einer kanonischen Transformation

$$(6) \quad F(x) = U[\sigma] F(x) U^{-1}[\sigma]$$

unterworfen, wobei $F(x)$ ihre Heisenberg-Darstellung, bezogen auf einen konstanten Zustandsvektor, und $U[\sigma]$ den für eine raumartige Oberfläche definierten Operator einer unitären Transformation bedeutet. Seine Bewegungsgleichung ist durch den Kopplungsterm in der Lagrangeschen Funktion

$$(7) \quad H(x) = -\frac{1}{c} j_{\mu}(x) A_{\mu}(x)$$

bestimmt, in der die j_{μ} die Stromkomponenten bedeuten, und lautet

$$(8) \quad i \hbar c \frac{\delta U[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = H(x) U[\sigma].$$

Die Vertauschungsrelationen der transformierten $F(x)$ lassen sich dann durch geeignete D - und A -Funktionen ausdrücken. Der wesentliche Fortschritt dieser „Wechselwirkungsdarstellung“ ist, daß man dank der Invarianz von (7) und (8) die divergenten Massen- und Polarisierungsterme auf eine invariante Weise absondern kann. Am Schlusse wird gezeigt, wie man das longitudinale Feld der Lichtquanten auf ebenfalls kovariante Weise eliminieren kann, und ein invarianter Stoßoperator im Sinne von Heisenbergs S -Formalismus aufgestellt. Wessel (Dayton/Ohio).

Groenewold, H. J.: Superquantization. I. II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 977—989, 1091—1103 (1948).

Die Quantelung des klassischen Partikel- und Wellenbildes sowie die Beziehung

der zweiten Quantelung zur Behandlung des Mehrteilchenproblems im Konfigurationsraum werden in systematischer Weise dargestellt, wobei einige Dinge eingehender diskutiert werden als in älteren Arbeiten. Die Literatur ist bis zu Diracs Theorie (Bakerian lecture 1942) sowie dem Paulischen Bericht hierüber berücksichtigt.

Höhler (Berlin).

Feer, Daniel B.: The emission of radiation in the disintegration of mesons. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 75*, 731—734 (1949).

Die Vorstellung, daß das beim Zerfall des Mesons entstehende Elektron stoßartig von der Geschwindigkeit 0 auf etwa die Lichtgeschwindigkeit c beschleunigt wird, führt klassisch zu dem Ergebnis, daß die als Strahlung abgegebene Energie nur etwa den Bruchteil $e^2/\hbar c \sim \frac{1}{137}$ der Gesamtenergie ausmacht. Die Frequenzverteilung der Energie ergibt sich durch Fourierzerlegung der Stoßbeschleunigung und hat bei kleinen Frequenzen endliche Werte. Quantentheoretisch bedeutet dies, daß die Zahl der emittierten Photonen bei kleinen Frequenzen divergiert. Dieses Resultat wird für die skalare, pseudoskalare und vektorielle Mesonentheorie durch Betrachtung der Übergänge zweiter Ordnung und Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Photons bestätigt und gezeigt, daß alle wesentlichen quantentheoretischen Züge sich schon in der klassischen Betrachtung vorfinden.

Volz (Erlangen).

Harish-Chandra: Motion of an electron in the field of a magnetic pole. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 74*, 883—887 (1948).

Verf. knüpft an eine Diracsche Untersuchung der Bewegung eines Elektrons in einem magnetischen Feld an, nach welcher sich die Unmöglichkeit stationärer Zustände ergab [vgl. P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. London A* **133**, 60—72 (1931); dies. Zbl. **2**, 305]. Dabei war die Spinwirkung vernachlässigt worden. Verf. zeigt nunmehr, daß die Diracschen Ergebnisse auch dann noch zu Recht bestehen, wenn das von der Spinwirkung herrührende magnetische Moment berücksichtigt wird. Zur mathematischen Durchführung seiner Untersuchung wählt Verf. räumliche Polarkoordinaten und die Bewegungsgleichungen des Elektrons in der von Dirac angegebenen Form [vgl. P. A. M. Dirac, *Principles of quantum mechanics*, Oxford 1947, Cap. XI; dies. Zbl. **30**, 48].

M. Pinl (Köln).

Juárez, Antonio Romero: Periods of motion in periodic orbits in the equatorial plane of a magnetic dipole. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 75*, 137—139 (1949).

Die Bewegungsgleichungen für ein elektrisch geladenes Teilchen, das sich in der Äquatorebene eines magnetischen Dipols bewegt, werden mit Hilfe elliptischer Funktionen streng gelöst. Die Umlaufzeiten in periodischen Bahnen werden berechnet und numerisch für Teilchen der kosmischen Strahlung, die sich in der Äquatorebene des magnetischen Dipols der Erde bewegen, ermittelt. *J. Meixner.*

Fermi, Enrico: On the origin of the cosmic radiation. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 75*, 1169—1174 (1949).

Nach der vorgeschlagenen Theorie sollen die Teilchen der kosmischen Strahlung hauptsächlich im interstellaren Raum der Milchstraße entstehen und durch wandernde Magnetfelder beschleunigt werden.

J. Meixner (Aachen).

Molière, Gert: Zur Theorie der Luftschauer. I. Die mittleren Quadrate der räumlichen und Winkelablenkung. *Z. Physik* **125**, 250—268 (1949).

Die Arbeit enthält die Berechnung der auf Vielfachstreuung beruhenden mittleren Quadrate der Winkel- und räumlichen Ablenkung von Schauerteilchen auf Grund der Kaskadentheorie und der Bethe-Heitlerschen Formeln für Bremsstrahlung und Paarerzeugung. Den Rechnungen liegt zunächst die Annahme der „Vielfachstreuung“ zugrunde, doch wird der Einfluß der „Einfachstreuung“ nachträglich berücksichtigt. Für die Energie der Elektronen an einer bestimmten Stelle wird dabei ein Potenzspektrum angenommen und dessen Veränderung innerhalb der Atmosphäre untersucht.

Volz (Erlangen).